A Survey on the Theory of Risk Measurement

HE Sihui, YUE Hua, RAN Shengxin
School of Finance and Statistics, East China Normal University, Shanghai, China, 200241

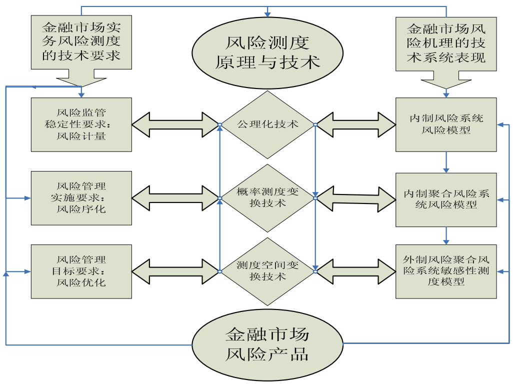
Abstract: In this paper, development of the theory of risk measurement be explored firstly, and the structural analysis of the techniques of risk measurement in the sense of random mechanics also be discussed. The axiomatic characters of varies risk measures compared in the paper. At last, the critical technique problems in the literature and the application of the theory of risk measure in financial instruments meaningful discussed.
Keywords: risk measurement risk axioms convex risk measures dynamic risk measure Applications of risk techniques

Ⅰ.引言

在过去的半个多世纪，特别是近十年来我们经历了有关风险测度的技术方法的迅猛发展。该理论技术是金融机构监管者、金融机构管理者、金融工程师、精算师、风险管理师、基金经理人、机构投资者和个体投资人等所有从事与现代金融服务业相关联的人都十分关注的理论和技术领域。最根本原因就是风险测度技术集中体现了对金融风险的识别、量化和管理。金融领域的核心技术问题无非是三个方面的理论问题：资产定价理论、组合选择理论、风险管理理论。它们之间相互关联、相互影响，其中风险测度理论对三者都有重要的技术影响。现代金融业的国际化、集团混业经营模式，催生了金融衍生的快速发展，它极大地促进了现实经济领域的发展，也指数级增加了金融风险管理的复杂性，正如我国复杂性科学学者宋学锋所转述的话：“相对论消除了关于绝对空间与时间的幻想；量子力学则打破了关于可控测量过程的牛顿范式的梦想；而复杂性则消除了拉普拉斯关于决定论范式可预测性的幻想”。风险测度理论应该说是金融领域复杂性科学的集中体现区域，被人们称为是一种艺术状态“State of the Art”, 这是由该理论技术所解决的金融问题的现实背景所决定的。从现实市场实务的要求看，监管者和管理者要求金融业的稳健发展，金融行业的行为规范、并约束于法律法规的框架内；金融技师（金融工程师、精算师、风险管理师）要求产品的增值力强，且风险暴露在可控范围；金融消费者（投资者）要求投资回报高、资本金安全。所以对金融风险的识别、量化和管理是市场实务的内在要求。从金融产品的风险形成机理看，风险来自于系统内的多方面、多层次、多阶段的影响；也来自于系统外系统性与非系统性、内部市场与外在市场机制等多方面影响。因此，风险测度理论的建设从技术层面看，必须考虑的因素和关联性有：动态风险与静态风险的关系；单期风险与多期风险的关系；一元风险与多元风险的关系；系统风险与个体风险的关系；系统随机性与随机扰动的关系；基础过程与衍生过程的关系等。风险测度理论的建设从实践层面看，必须考虑的路径和可操作性有：准备金管理与风险的量化技术；风险投资管理与风险的序化技术；风险套期操作与风险优化技术；金融产品定价与风险均衡技术及价值方程等。图 1 对这种理论认识进行了结构性分析展示。本文的结构是这样安排的，文章第二部分对风险理论的认知系统特别是风险量化技术进行系统总结与回顾，提出理论发展所存在的问题；第三部分研究序化技术的发展历程，就存在问题进行探

讨；第四部分针对风险优化技术；第五部分就风险定价的风险均衡技术进行探索，提出

图 1 风险测度理论的技术结构



2、金融风险测度理论的发展历程

对于风险的科学定量化研究，最早可以追溯到上世纪初。最早对风险进行识别、分类、比较、量化即对风险进行测度是具有划时代意义的。在科学的发展历程中，新概念的产生代表一种新思想、新理论、新方法的诞生，所以，我们必须首先从风险的认识、分类、比较和定量化的科学概念的发展历程开始研究风险测度理论的形成历程。从最近几年全球相关领域的研究文献看，关于风险测度的技术研究主要集中在以下6个方面：（1）风险的公理化研究；（2）风险或一致性风险的构造性研究；（3）保险中保费原则研究；（4）动态风险测度研究；（5）风险测度之间以及风险测度理论与经济学、金融学理论之间相关性研究；（6）风险测度理论在金融领域的应用研究；六个方面。但是以作者看，任何一种新兴理论学科，在其发展初期都有自身内在的产生发展的特性，即从基本概念、基本原理的产生，到理论框架的成型，都经历多次反复探究、多元化发展探索，最后到达公信理论体系的聚合过程。金融风险作为一个特定研究对象即研究金融市场中的不确定性问题，也不可避免地历经了对研究客体的感觉、知觉到认知的过程，我们必须从这个历程中提炼作为该领域的核心概念、原理、原则即衍生规律和知识体系，系统研究该理论的基本结构和框架，从而明确研究目标，完善研究视点，以科学的方法合理集成新的交叉学科体系——风险测度理论及其技术。我们的研究就在如此认知架构下展开。

第一、关于风险（risk）与不确定性(uncertainty)的基本概念与关系。**最早**具有标志性论述的文献是Knight (1921)，他在文

有待深入研究的问题。

献中将两者严格区分开来。Ellsberg (1961)更精确地来定义不确定性，那就是一个事件是否具有不确定性或含混性取决于它是否具有不确定的概率，且不确定性的量化使用容度理论来描述。**第二次**关于风险概念的延伸是1952年Markowitz的组合理论中将股票价格或收益波动的随机性方差作为风险概念并同时加以量化，从而衍生出许多通过方差、半方差、绝对变差和系统总变差等来定义风险的研究历程。**第三次**关于风险概念的延伸是风险函数概念的提出，该概念被认为是现代金融风险测度理论的标志【11】，它是精算学领域最早提出研究的概念，认为金融风险是金融收益或损失的不确定性所致，金融市场背景的现实或实现由ω表示，所有可能背景形成一个集合Ω，建立在该集合上的代数或域记为F，给可测空间(Ω, F)定义适当的概率测度，形成概率空间(Ω, F, P)，在此基础上研究风险的测度问题。**第四次**关于风险概念的延伸是风险公理化的诞生【7】所形成的，即将风险看作是建立在概率测度集上的泛函$\rho: \mathrm{P} \to \Re$，这种风险满足一定的公理化条件，并且对金融市场有和谐一致的市场解释。最近，许多学者利用不确定性来研究均衡模型，在这里不确定性或者金融风险是用Choquet-期望效用（Choquet expected utility (CEU)）或最大期望效用（maxmin expected utility (MEU)） (see Schmeidler (1989) and Gilboa and Schmeidler (1989))来描述的。将效用、风险与金融决策结合起来，开辟了风险测度理论的另外一个天地。关于该概念的一致性的认知至今还没有一个统一认同或近似认同的概念描述，但是，以广义不确定性作为风险概念的基础是一致的，由于金融市场的操作最终是经过市场参与者完成的，因此，行为金融学、金融博弈论、金融混沌分形理论等的发展为风险概念的延伸范围提出了明显的挑战，从更加广泛、基础的金融复杂系统看待金融风险的本质属性、从数学结构的观点看，就是研究金融风险需要更加一般的空间结构，因此，不可加测度理论与随机积分理论的随机分析研究、随机场及其微分流形和金融价格纤维丛的数理金融研究等多学科研究发展，终将会对该理论概念最终给出一个一般、通式、科学的内涵与外延来。

第二、是关于金融风险的形成机理认识，即风险模型技术问题的研究。

首先，从理论技术基础发展看，早在1900年，法国学者Louis Bachelier在他的论文【10】中首次将股票价格的轨迹描述为Brown运动，开创了金融风险计量的观念性研究的先河。五年之后在1905年，物理学家Einstein, A.【46】从力学体系的随机受力的均衡中，证实了Brown运动的力学机理；随后于1907年Brown运动的物理试验数据进一步证实了Einstein, A.的力学分析结论。1923年，Wiener, R.【169】从概率论的角度严格论证了Brown运动随机性的统计特征，其实这也就是为什么也称Brown运动为Wiener过程的原因。随后在数理分析方面，Paul Lévy在三十年代，引入鞅的概念和技术方法；Andrey Kolmogorov在三十年代将概率论的基础理论建立在严格的数学公理化体系上，使概率论知识在一定意义下才成为真正的科学知识体系；1944年，日本数学家Kiyosi Ito,【89】建立了一种新的积分技术后称Ito-积分，为后来的随机分析立下了不朽的功绩，被誉为随机积分之父；50年代，Doob进一步发展了鞅方法和技术。

其次，从实践领域要求即经济金融学理论发展看，显然，Louis Bachelier所具有直觉力和洞察力远远超出自己的时代，一方面，由于从数学的观点看，这种拟合需要概率论方面更多的技术支持，如二三十年后Wiener,R.,和Kolmogorov,A.,对上述研究成果的支持；另一方面，在经济金融的市场实际上看，金融市场的繁荣程度远没有达到产生积极使用该研究成果的程度。由于这些原因，Louis Bachelier的研究成果在近半个世纪的发展过程中没有产生应有的影响力，直到经济学家Paul Samuelson（1970年诺贝尔经济学奖获得者）在MIT图书馆看到这篇文献。到这里为止，数理技术经过三十年代到四十年代的发展已经有了相当的规模，世界经济发展，特别是二战过后，西方经济社会的迅速崛起，金融市场发展的加速才从社会现实与数理技术两个方面都对风险理论的发展设定了现实的技术理论基础。

最后，从理论发展的成熟程度看，国际上各个发达经济体对于风险测度理论问题的研究已经有相当的历史。从马科维兹（Markowitz H．1952）投资组合理论，到资本资产定价模型(Black, F., and M. Scholes.1973; Cox, J.C. and Ross, S.A. 1976; Merton, R.C. 1973；Harrison, M., and D. Kreps. 1979)；从效用均衡理论（Von Neumann,J.,and Morgenstern,O.1947；Sharpe, W.F., 1964. Gerber, H. U., and Gerard P., 1998）到保费均衡原则（Buhlmann, H. 1980；Goovaerts, M.J., de Vylder, F., Haezendonck, J., 1984；Gerber, H.U., 1979；Wang, S.S., 2000）；从各种风险计量方法研究（Lintner, J., 1965；Kaas, R.; Van Heerwaarden, A.E.; Goovaerts, M.J. 1994；Dhaene, J.; Goovaerts, M.J. 1996；等）到风险测度的公理化建立（Goovaerts, M.J.,et al. 1984；Artzner, P.，et al.1999; Delbaen, F., 2000,2002;等）；从风险公理化技术研究（精算学领域如文献Peng, S., 1997，2004，2005；Ruszczynski, A. and Shapiro, A., 2003，2005，2006，2007；）到给定市场约束与风险测度技术约束下风险管理实践的应用研究（数理金融与金融工程领域，如文献Mataramvura and Øksendal (2007),Øksendal and Sulem (2007), Elliott et al. (2006, 2008),）；风险测度理论与技术研究已有将近半个世纪的历史，在风险理论建模、风险计量技术、风险测度的公理化建设、现代风险测度理论与市场化应用研究等各个方面都取得了一些优秀的成果。以下**表格**1对整个技术发展进行了系统总结。

从金融市场结构作为一个复杂巨系统看，风险测度表现于股票市场、固定收益市场、衍生品市场；从风险测度的技术特征看，有变异性测度技术（如方差、半方差和绝对变差等），

表格 1 风险测度理论与技术发展年史表

年份	主要理论与技术	作者
1900	股票价格的随机特性-使用 Brown 运动刻画股价	Louis Bachelier（法国）
1905	建立随机力系统下 Brown 运动的物理模型	Einstein, A.
1914	建立信度概念，形成信度理论基础	Mowbray, Albert H.
1921	区分风险与不确定性，为风险测度建立概念基础	Knight,F. H.,
1923	建立凸序、凹序概念，为风险比较建立概念基础	Schur, I.,
1923	建立 Brown 运动的概率模型，开启连续风险模型研究	Wiener, R.

1930	建立 Hardy-Littlewood 变换，为风险量化奠定变换基础	Hardy,G.H.;Littlewood,J.E.
1938	提出久期概念，使得利率风险的度量有了计量基础	F.R.Macaulay,
1944	建立 Ito-积分理论，开启使用随机分析研究风险模型	Kiyosi Ito
1952	建立组合理论，首次使用风险方差量化风险	Markowitz, H.,
1952	研究凸（凹）序性质及其相应不等式，为风险公理之基础	Hardy,Littlewood & Polya
1953	建立容度理论和 Choquet-积分理论，对不确定性进行量化	G. Choquet,
1958	建立 regime-switching 模型，风险测度设新模型基础	Quandt, R.E.,
1959	提出 copula 概念，多元随机变量分量间相依性度量问题。	Sklar, A.,
1963	建立资本资产定价模型，测度系统性风险的β值	Sharpe, W.F.，
1963	建立描述金融资产市场价格行为的$\alpha-$稳定分布，	Mandelbrot, B.B.,
1965	建立风险资产均衡模型，测定单位风险资产价格	Lintner, J.,
1968	将效用理论和保险定价结合起来，开启保费厘定新领域	Borch,K.
1969	提出二级随机占优概念，在随机序化理论方面具有重要价值	Hadar, Joseph, Russell, William R.,
1970	将凸序与递增凸序引入经济领域，用于测度风险	Rothschild and Stiglitz
1970	建立风险理论的数学基础，标志精算学风险理论的诞生	Bühlmann, Hans,
1970	提出有效市场假设（EMH）理论，建立风险-收益模型	Fama, Eugene F.,
1971	在Macaulay久期基础上提出免疫概念，以规避利率风险	Fisher, L. and Weil, R.,
1973	建立期权定价模型和测度风险敏感性的希腊字母体系	Black,F., & Scholes, M.,
1973	建立线性倒向随机微分方程，提供金融衍生品定价基础	Bismut, J.M.,
1974	引入 Swiss 保费计算原则，为风险测度技术新技术	Gerber, Hans U.,
1975	应用凸序建立有效价格模型，	Peleg, B., and M. E. Yaari
1976	建立套利资产定价模型	Stephen A. Ross，
1976	提出了股票价格服从外生的常波动率的跳扩散过程	Merton, R.C.
1979	建立多期套利的鞅技术模型，建立基本资产定价定理	Harrison, M.&Kreps,D.M.,
1979	建立超模概念，使得多元风险序化有了概念基础	Marshall, A.W.; Olkin, I.,
1980	建立保费均衡原则，开辟保险产品定价技术研究领域	Buhlmann, Hans,
1981	建立 Esscher-变换保费原则，联系了保费定价与无套利定价之间的关系，同一了风险测度的金融与精算研究	Gerber, Hans U.
1981	建立关于位置、标度、偏度、峰度的测度公理，	Oja,H.，
1982	建立随机凸序下的有效估价模型，	Dybvig, P., and S.Ross
1982	建立 Haezendonck－测度，在 Orlicz- 保费	Haezendonck,J.

	原则基础上的新风险测度技术（建立 Orlicz-空间上的 Luxemburg-模）	, Goovaerts, M.,
1983	引入随机贴现因子 SDF 概念，使得金融经济学中的一价律、无套利、Arrow-Debreu 的状态价格等得到技术统一。	Chamberlain, G.， Rothschild, M.,
1984	建立保费计算的一般原则，给出保险业界测度风险的通式技术方法。	Goovaerts,M.J.,DeVylder, F., Haezendonck, J.
1984	提出 M-squared 风险测度概念，一般化变异性风险量化测度	Fong, H.G.，Vasicek, O. A.,
1985	建立凸保费原则，保险保费计算原理同一于金融风险测度	Deprez, O., Gerber, H.U.,
1987	建立风险环境下的对偶选择理论，为新风险测度建立基础	Yaari, M.E.,
1988	在久期、免疫的基础上，一般化利率期限结构（TSIR）的模型研究，开辟风险模型的有一研究领域	Chambers,D.R.,Carleton,W. and McEnally, R.,
1988	成立十国集团 Basle-委员会，开启银行监管风险技术指导	G-10，Basle Committe
1989	建立 Choquet-期望效用概念，使经济学的均衡理论、金融学的期望效用理论和精算学的风险度量技术完美结合	Schmeidler, D.,Gilboa and Schmeidler, D.,
1989	扩展 regime-switching 到相依结构，风险测度更加可信	Hamilton, J.D.,
1990	引入畸变变换来计算保费原则，开创费率厘定新方法	Denneberg, D.，
1990	提出 trimmed regions 统计概念，测度数据中心化程度	Liu, R. Y.
1990	提出一般倒向随机微分方程（BSDE）模型，将随机控制技术引入金融产品定价、最优策略选择等的风险测度中	Pardoux, E.,and S. Peng,
1992	推广利率期结构模型，建立 HJM 模型；在 Ito-积分下模拟利率变动规律。	Heath,D.,Jarrow, R., Morton, A.
1993	提出并倡导 VaR 测度技术，开始量化风险实践	Basle I（巴塞尔协会）
1993	提出 Fama–French 因子模型，开启实证资产定价的风险测度技术领域。	Fama, Eugene F., and Kenneth R. French,
1993	引入大变差理论研究风险测度问题，巨灾风险测度基础	Djehiche B.
1994	建立非可加测度理论，建立风险序化量化之间辨析关系	D. Denneberg,
1995	引入泛函分析的新分离定理来求解有效策略与定价规则	He, H. and Modest, D. M.,
1996	引入畸变函数（Wang-变换）概念，推进了保费厘定的测度变换技术	Wang, S.
1997	建立了保险价格的公理化体系，使金融市场无套利原则得到新的解读。	Wang,S.S.,Young,V.R.; Panjer,H.H.,
1997	提出 g-期望概念，在 BSDE 的结构上考虑风险测度问题	Peng, S.,
1999	建立风险测度的一致性公理化体系，给出风险测度的表示定理概	Artzner, P., Delbaen,

	念，标志着风险测度理论走向成熟	F., Eber, J. M. and Heath, D.,
1999	给出动态风险测度概念，	Cvitanic, J. Karatzas, I.,
1999	全面引入 copula 技术于风险测度领域，解决相依风险计量	Nelsen, R.B.
1999 2001	引入绝对变差、半变差和标准半变差的概念，建立了变异风险测度与随机占优风险测度之间的相容性。	Ogryczak,W.， Ruszczynski, A.
2000	建立套期中的一般风险函数，构建自融资策略新解	F¨ollmer, H.，Leukert, P.
2000	在 trimmed regions 积分下建立 Depth 函数，测度样本散度	Y. Zuo, R. Serfling,
2001	引入畸变风险测度，将经典金融衍生定价纳入畸变测度	Wang, S. S.,
2001	引入市场摩擦下交易策略优化的风险测度问题。	Jouini, E. and Kallal, H.,
2001	引入梯度分配原则（梯度公理），建立一种风险分配原则	Denault, M.,
2001	建立分布不变一致性风险测度概念，	Kusuoka, S.
2002	引入谱风险测度，建立了统一表述的一致风险测度	Acerbi, C.,
2002	引入凸风险测度，考虑非完备市场下测度的选择问题	F¨ollmer, H.，Schied, A.,
2003	建立一般风险测度的统一方法体系，表述各自特性及使用	Goovaerts, M.,et al.
2003	建立一致风险测度下的组合优选模型，开启	Benati, S.,

	不同测度下的风险策略选择问题	
2003	提出极小熵鞅测度概念，使得效用最大化与风险中性相合	Fujiwara,T., Miyahara, Y.,
2003	系统研究极值理论 EVT 在风险测度中的应用模型	EmbrechtsP., KluppelbergC.，T. Mikosch
2004	建立保证金新机制，强调通过内部控制来管理金融风险	Basle II
2004	定义一致向量风险测度，给出对应的表示定理	Jouini, E., Meddeb, M. and Touci, N.,
2004	提出扩展单调序的概念，分布不变律与扩展单调序关系	Leitner, J.
2006	引入期望有界风险测度概念，建立变差测度公理，形成了变差测度与期望有界测度的 1-1 对应关系。	Rockafellar,R. T.,Uryasev, S. and Zabarankin, M.
2006	欧盟委员会发布 Solvency II，针对保险业风险管理进行监管	EU. Solvency II
2007	建立 Esscher–Girsanov 变换，使得风险测度技术与金融市场无套利条件相容	Goovaerts, M.J., Laeven, R.J.A.,
2008	建立一般风险函数下组合优化模型，将传统数学规划技术引入风险优化测度理论	Balb´as, A., Balb´as, R. and Mayoral, S.,
2008	提出时齐动态风险测度概念，风险测度技术更贴合市场	**Jocelyne Bion-Nadal**

金融市场实践对于风险理论的要求：给出金融资产及其衍生品的公平价格——即风险定

价理论；在金融市场中的风险产品的选择问题——即风险序化理论；给出一定市场背景下组合投资的策略问题——即风险优化理论。以下就分别在不同领域内，风险测度理论的发展成果和存在的发展前景展开讨论。

3、风险测度理论发展的技术总结

3.1 风险量化理论

3.1.1 以测度随机变异（Dispersion Measure）来量化金融风险的理论与技术

最早研究风险量化的文献可追溯到1900年的Louis Bachelier论文，但是，在1923年Wiener, R.的研究结论之前，不可能将不确定性问题真正量化。前Markowitz时代的风险测度是用金融收益的风险调整因子来刻画的，这种技术方法的优势是可以得到瞬时的投资比较。1952年Markowitz, H.,提出现在组合理论的模型，第一次将金融市场的风险通过随机收益的方差来量化，这种技术方法的优势是可以在控制风险一定情况下，寻求收益回报的最大化问题，也可以在收益给定下，寻求风险最小化的投资策略。具体技术模型参看文献【117，118】。同时，Roy, A.,（1952）也讨论了组合问题，而他使用的是损失发生的概率值来度量风险值，这也开启了另外一种风险测度的技术方向。其实，在精算学的经典领域使用破产概率来测度金融企业的流动性风险，也有相当的历史。因为这些技术概率值的上界是通过方差约束的，有Tchebycheff-不等式知，风险测度的实质技术仍然是方差。沿着Markowitz的思路，使用收益或损益的随机变异性而测度风险的方法便蜂拥而至，有的使用半方差、有的使用绝对差、有的使用标准绝对差、有的使用大变差等来测度风险。随后的技术研究中，Tobin, J., (1958)，Treynor (1961), Sharpe, W. F., (1964)，Lintner (1965)对风险产生机理进行了进一步研究，提出了系统风险（也叫组合风险）与个体风险的概念，风险来源的结构研究得到了深化，但是风险测度仍然使用方差技术，其中Sharpe, W. F.,建立的资本资产定价模型（CAPM）得到了广泛应用，为此，他与Markowitz, H., Merton Miller(建立了公司资本结构模型)共获1990年的Nobel-经济学奖。1976年Ross, S., (1976).提出了套利定价理论（APT），提出了由通涨率、利率、汇率、黄金价格和原油价格决定的市场风险因子，将风险机理研究推进了一部，但风险测度仍然使用系统方差。

进入八十年代以来，关于风险测度的理论研究有一个新的趋势与倾向，那就是不但注意了所选用风险测度的技术层面，也注意到了风险测度在实际应用层面的兼容性与合理性问题。如 Markowitz 的风险测度理论对市场随机性假定的科学性即资产收益的高斯性、完备市场假定的合理性即无摩擦等条件。大量这一时段的文献证实，金融市场风险资产的价格或收益的市场行为是非对成、厚尾、有极值性特征的，而且市场也是非完备的。稳定分布 1983 年 Chamberlain, G. and Rothschild, M., (1983)提出了随机贴现因子（SDF）概念，通过现代数理金融分析框架 Cochrane, J. H.,（2001）在市场结构的 Hilbert-空间上通过 Riesz-表示定理建立 Hilbert-空间的对偶空间，而推演风险贴现因子的存在性，这一存在性等价于金融市场一价律的市场条件，也是无套利市场的必要条件，特别是贴现因子（SDF）的存在性可以推导出一个线性泛函来定义衍生品价格，也就是创造一个风险测度的技术新领域。1987 年 Yaari 提出了风险条件下的对偶选择问题，提出了风险测度技术与随机占优技术的相容性问题，警示研究者风险测度理论不仅必须兼顾技术的科学性和与实际市场的相合问题，也要注意新技术与已有风险测度理论与技术的相容性问题。其中 1993 年 Djehiche B. (1993)引入大变差概念，将风险极值理论技术引入风险测度来，通过极值事件的随机规律探索系统风险，在精算学领域率先研究巨灾风险的测度问题，该技术领域在 9-11 事件后变得更加突出。1999 年 Ogryczak,W.，Ruszczynski, A.，（1999，2001，2002）提出可选变异测度概念，使用绝对变差、半变差、标准绝对半半变差等技术概念，将变异性风险测度与效用极大化的经济学选择相容的风险测度技术。而以 He, H. and Modest, D. M., (1995)；Luttmer, (1996)；Jouini, E. and Kallal, H.,（2001）等为代表的研究者则从非完备市场的假设入手，研究新的市场假定下风险测度的规则问题，如衍生品定价规则、有效策略、随机贴现因子（SDF）的存在性等等，其核心是风险在新市场环境下的测度问题，基本的技术概念仍然是方差，基本技术手段是利用泛函分析中的空间结构分离定理，将风险资产或资产组合的可接受性与不可接受性加以区分。变异性风险测度的另外一个研究动向就是讨论如何将新型变异性风险测度技术与金融市场的实际操作结合起来，如文献 Konno, H., Akishino, K. and Yamamoto, R., (2005).将市场非完备、基础资产收益的非高斯性即分布厚尾性、决策者期望极大化等现实因素都

考虑进去，研究所存在的变异性风险测度的技术问题。随着市场结构的复杂化，风险测度的技术要求对数学发展也产生了极大的影响。如何量化金融市场风险仍然有很多具有挑战性的问题需要努力研究，第一、如何建立由不同市场风险管理的量化要求所决定的风险测度的技术选择原则？使得所选风险测度技术既可以满足风险管理实践要求，又有良好的公理化特性及市场相容性。第二、如何建立静态与动态、单期与多期、个体与聚合、理论与实践、金融与精算等多层次、多领域、多学科相互兼容，互补协调的风险量化技术体系和公理化建设？对于该问题的研究将是现时风险理论研究最大的挑战！

3.1.2 以随机分布的分位数来量化金融风险的理论与技术

在以上3.1.1的变异性风险测度理论中，主要风险测度技术是使用方差类指标，它有不少统计优点，如：在独立性系统中，总方差可以变为个体方差的和；方差函数容易被直接用为优化函数；经典统计提供了许多方差有关量的统计估计方法。但是这种风险测度技术有其先天性不足：首先，在金融市场收益为非高斯的基础资产价格行为下，由于厚尾性，极值事件的概率等风险解释力明显下降；齐次，方差风险测度理论对于上行、下行风险是同等对待的，这与金融市场实务中的风险问题不能很好吻合；再次，除非二次效用函数选择或基础资产收益的正态分布假设，一般情况下，方差类风险测度与期望效用方法等难以完全相容。所以对于下行风险（downside risk）采用单边矩来测度是一个不错的选择。

定义3.1 设$k=1,2,\cdots$，称

$$LPM_k(c,X)=E\left[\max(c-X,0)^k\right]$$

为随机变量X的$k-$阶下行偏矩（lower-partial-moment）.

这样定义风险量化方法，可以灵活选择风险损益水平c，偏矩的阶数等以适应现实市场风险管理的要求。如当$k=1$时，被称为是期望遗憾值（expected regret ER）；

$$ER_c(X)=E\left[\max(c-X,0)\right]$$

1999年Ogryczak, W. and Ruszczynski, A., (1999).；和 Gotoh, J., Konno, H.,2000.选取$c=E(X),k=1,$得到下半绝对变差的风险量化式：

$$LSD(X)=E\left[\max(E(X)-X,0)\right]；$$

当$c=E(X),k=2$时，得到半方差或半标准差风险计量模型。自从1973年布雷顿森林体系解体后，西方发达经济体由于汇率传导而形成的金融市场风险发生频率不断增强。如1974年6月26日，德国Herstatt银行由于其巨额损失被监管者强行要求监管其流动性风险问题等一系列问题，促使西方经济体强化了风险防范意识。1988年十国集团成立Basle银行监管委员会，负责制定银行业的风险管理法规条列，提出了最低保证金要求，以控制流动性风险暴露。八十年代末期，以J.P.摩根银行率先在公司范围内推行VaR风险管理技术，1993年BasleⅠ正是颁布执行，由于金融市场、金融产品发展的空前繁荣，不同金融企业主业产品的风险特性具有极大的差异性，金融市场风险管理的难度迅速增大，十年后2004年巴塞尔委员会推出了BasleⅡ，强调风险的内部控制标准，与澳大利亚精算学界提出的风险循环控制理论，欧盟的Solvency II一起形成了风险测度理论发展的有一个新起点，由七十、八十初的个体性风险测度技术向80年代末到九十年代的风险测度的统一技术发展，又从九十年代后期的统一性要求向现代金融市场的个体特性化进一步提高发展。形成一个螺旋式递进式的发展历程。现在如前文所述，假定金融市场的随机性概率空间结构为(Ω,F,P)，对于建立在其上的随机变量X，如果在数理金融的观点上看，令其代表的是基础资产的未来价格或收益，

定义3.2 对应于给定概率空间上的风险价值

$$VaR_{u_0}(X)=-\inf\left\{\alpha\in\Re \middle| P(X\le\alpha)>u_0\right\}$$

如果在精算学观点上，令其代表风险资产的未来损益值，则对应风险价值

$$VaR_{u_0}(X)=\sup\left\{\alpha\in\Re \middle| P(X\ge\alpha)>u_0\right\}$$

其中的参数u_0代表是风险控制的置信度水平。

风险值的含义就是风险管理者除非面对市场发生概率为$100u_0\%$的市场最坏境况，以$VaR_{u_0}(X)$的保证金是可以有效对冲市场风险暴露的。不难证明，如果定义风险测度$\rho:\mathrm{P}\to\Re$为$\rho(X)=VaR_{u_0}(X)$，则该风险测度具有很多良好的公理化特性。2001年，Acerbi et al.提出了期望损益（ES）概念，用意在于修补VaR技术中的不足；2002年，Rockafellar, R. T., and Uryasev, S., 提出了CV aR+,CV aR−, 和CvaR的正式定义。

定义3.3 如果市场风险资产X满足$E(X^-)<\infty$,则定义

$$ES_\alpha(X)=-\alpha^{-1}\left(E\left[XI_{\{X\le x_\alpha\}}\right]+x_\alpha\left(\alpha-P(X\le x_\alpha)\right)\right)$$

2001年，Kusuoka, S.将风险资产的ES表达式变换形式为

$ES_{\alpha}(X)=-\alpha^{-1}\int_0^{\alpha}q_{\mu}(X)d\mu$

其中$q_{\mu}(X)-$为X的下分位数函数，

$x_{\alpha}=q_{\alpha}(X)=\inf\{x\in\Re|P(X\le x)\ge\alpha\}$，对应的上分位数为

$x^{\alpha}=q^{\alpha}(X)=\inf\{x\in\Re|P(X\le x)>\alpha\}$。同上，如果定义风险测度$\rho:\mathrm{P}\to\Re$为

$\rho(X)=ES_{\alpha}(X)$，则它具有如下优良性：

i. $ES_{\alpha}(X)$是关于实数$\alpha\in(0,1)$为单调的函数，即$\forall\alpha\in(0,1),\varepsilon>0,1+\varepsilon<1,$有不等关系式$ES_{\alpha+\varepsilon}(X)\le ES_{\alpha}(X)$；

ii. $ES_{\alpha}(X)$关于$\alpha\in(0,1)$是连续的；所以可以不考虑基础风险资产的分布情况，风险信度水平的微小改变，不会形成太大的风险量变化。

iii. $ES_{\alpha}(X)$关于风险资产或金融头寸X为凸函数；这使得最优化技术和理论可以很好的应用于风险管理实践中的风险投资和有效策略问题。

iv. $ES_{\alpha}(X)$是一致的、同单调可加，也是满足不变律的。

v. $ES_{\alpha}(X)$具有较好的尾部风险解析性质。

定义3.4 尾部均值（$\alpha-$tail mean）TM

$TM_{\alpha}(X)=-ES_{\alpha}=\alpha^{-1}E\left[XI_{\{X\le x_{\alpha}\}}\right]$

定义3.5 尾条件期望（tail conditional expectation TCE）

$TCE^{\alpha}(X)=-E\{X|X\le x^{\alpha}\}$，其中$x^{\alpha}-$为随机风险资产的$\alpha-$上分位数。

定义3.6 最坏条件期望（worst conditional expectation WCE）

$WCE_{\alpha}(X)=-\inf\{E[X|A]|A\in\mathrm{F},P(A)>\alpha\}$

显然，以上三种基于分位数的风险测度技术具有如下特征（Yamai, Y., Yoshiba, T.,）：

即三者之间有关系式：

$TCE^{\alpha}(X)\le WCE_{\alpha}(X)\le ES_{\alpha}(X)$，且等式成立的条件是基础资产的随机分布为连续型分布。

定义3.7 谱系风险测度（Spectral risk measures）

$M_{\phi}(X)=-\int_0^1 x_p\phi(p)dp,$其中谱函数$\phi\in L^1([0,1])$，称其为可采用谱，如果它满足：(1)$\phi(.)>0$; (2) $\|\phi\|=1$; (3) $\phi(.)-$为递减函数；

注意：

- 如果谱函数$\phi(.)$为可采用谱，则可以证明谱系测度$M_{\phi}(X)$是一个一致性风险测度；在这里我们可以将谱函数理解为投资者的主观风险厌恶的加权函数。
- 函数$\phi(p)$的递减性事实提供了一致性概念的一种直觉观点：如果一种测度是一致的，则其分配给较坏状态以较高的权重。
- 如果在$\alpha\in[0,1]$上引入一种新的测度$d\mu(\alpha)$，满足通常条件$\int_0^1\alpha d\mu(\alpha)=1$，如果令变换$dp=d\mu(\alpha)$，则有$M_{\phi}(X)=-\int_0^1 x_p\phi(p)dp=\int_0^1 ES_{\alpha}(X)d\mu(\alpha)$，可见谱系风险测度可以由期望损益测度来构建。特别的，当取$\phi(p)=\alpha^{-1}I_{\{0\le p<\alpha\}}$，即为在区间$[0,\alpha]$上的均匀分布函数，有$ES_{\alpha}(X)=M_{\phi}(X)$。
- 如果取权函数为$\phi(p)=\delta(p-\alpha)$，（即Dirac-δ函数，它满足对于任何区间$[a,b]$上的可积函数$f(.)$满足对于$\forall c\in(a,b),\int_a^b f(x)\delta(x-c)dx=f(c)$）这时不难证得有关系式$VaR^{\alpha}(X)=M_{\phi}(X)$成立，可见VaR也是谱系测度之一特列。
- 谱系测度满足风险测度的不变律（law-invariance）、同单调可加性。
- 谱系测度在实践上具有很好应用前景，因为它有良好的统计估计量。设有简单样本随机变量序列$X_1,X_2,\cdots,X_n$，令其次序统计量为$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$，定义函数

$M_{\phi}^{n}(X)=-\sum_{i=1}^{n}X_{(i)}\phi_i;$

其中权系函数$\phi_i,i=1,2,\cdots,n.$满足：

(1) $\phi_i\ge0$; (2) $\phi_i\ge\phi_j, if\ i<j$; (3) $\sum_{i=1}^{n}\phi_i=1$;

如果给定一个正的、递减的代表函数，满足$\sup\limits_{p\in[0,1]}\phi(p)<\infty$，则这里的权系函数的自然选择为$\phi_i=\dfrac{\phi(i/n)}{\sum_j\phi(j/n)};\ i=1,2,\cdots,n.$ 则可证明，当$E(X^{+})<\infty,E(X^{-})<\infty$成立时$M_{\phi}^{n}(X)$是一个一致估计量，一概率1收敛到$M_{\phi}(X)$。

- 文献【2】中对谱系测度与最优化问题进行了深入研究，表明选择谱系测度的

风险度量极小化问题与组合收益的极大化问题是统一技术问题，也就是说在极小化谱系风险测度的同时，组合收益的极大化就成为事实。

- 谱系风险测度与畸变函数的关系。后边我们会看到，畸变风险测度的定义为

$$\rho(X)=E^*(X)=-\int_{-\infty}^{0}g(F(x))dx+\int_{0}^{\infty}\left[1-g(F(x))\right]dx;$$

其中，畸变函数 $g(.)$ 满足：

$g:[0,1]\to[0,1]$；单调递增；$g(0)=0, g(1)=1$;

显然，两种风险测度的共同点是反映投资者的风险偏好特征。

3.1.3 以敏感性压力测试来量化金融风险的理论与技术

最早研究风险敏感性问题的应当属于1938年Macaulay提出的久期（duration）.他引入久期概念的目的是研究金融市场债券资产对利率波动的敏感性问题，其实质仍然属于风险的测度范畴。1971年Fisher 和Weil利用久期概念，构造了免疫（“Immunized”）概念，用以对冲利率风险的暴露。1973年Merton,R.C., 与Black, F.，Scholes, M., 先后发表“合理期权价格的理论”与“期权定价与公司债务”的文章，三位作者首先在连续型背景下解释了股票价格的随机行为，构建了任何市场上可复制衍生品价格所必须满足的二级随机微分方程，并利用Ito-引理得到了对应衍生品的定价或套期公式。这一了历史性或称开创性工作获得了1997年的诺贝尔经济学奖。Girsanov-Martin-Cameron定理提供了一个可选方式是给出了风险中性定价规则，因为该定理允许修改真实概率而得到一个新的概率测度与原概率测度等价称为中性风险测度，而在新概率测度下，资产市场价格的贴现是鞅。事实上，这个定价规则就是计算终极价格的现值期望。所以，根据Black-Scholes的结论：由任何衍生证券产生的风险水平，都可以通过交易δ单位的基础资产而使得组合中心化，这个δ就是衍生证券价格对基础资产价格的偏导数——即敏感性。因此，风险水平可以通过δ来量化。同理，因为衍生证券代理人为了套期风险必须连续做多或做空基础资产，而实务中很难做到这种连续交易，所以常用δ关于基础资产价格的敏感性Γ来反映风险水平的稳定性。如此等等可以得到如下一些风险敏感性测度的希腊字母序列：

Delta-δ. 表示组合价格关于基础资产价值的敏感性或偏导数；

Gamma-Γ. 表示δ关于基础资产价格的敏感性；

Theta-θ. 表示组合价格关于时间的敏感性；

Ro-ρ. 表示组合价格关于无风险利率的敏感性；

Vega-υ. 表示组合价格关于基础资产波动性（方差）的敏感性；

3.1.4 以概率测度变换来量化金融风险的理论与技术

（1）凸变换与风险量化技术

最早研究金融资产凸性应该追踪于经典文献Merton,R.(1973)的期权定价理论。研究凸性的重要性体现在三个方面的理由：第一、凸性是期权价格的基础性本质特性；另外一个更基础性的本质特性应该是当基础资产提供的支付为单调时，期权价格的单调性。第二、如果期权价格是凸的，则对应价格行为在波动模型、跳扩散模型和跳参数模型下都是递增的。第三、如果$\delta-$套期者使用的模型高估真实的波动，则得到一个超套权益，这时期权价格表现出凸性特征。其实，凸性特征是金融资产价格行为的一个一般性市场要求，一个身处金融市场的风险决策者，一定会确保金融头寸的分割不会增加金融风险，这就是要求风险测度满足凸性要求：

$\rho(\alpha X+(1-\alpha)Y)\le\alpha\rho(X)+(1-\alpha)\rho(Y),\alpha\in[0,1]$。

F¨ollmer，Schied（2002）指出，凸风险测度具有一个稳健表示 $\rho(X)=\sup\limits_{Q}\left(E_Q[-X]-\alpha(Q)\right),$ 其中 α 称为惩罚函数，Q 为概率测度。S. Kloppel, M.Schweizer（2007）在货币凹效用泛函（monetary concave utility functional）Φ_t 的概念基础上，研究抽象条件凸风险测度的卷积，证明其保持时齐动态特性。相应的无差异估值泛函也就有时齐特性，以等价概率测度观点得到一系列条件凸风险测度的表示定理。即代理人在非完备市场在t时刻关于收益（payoffs）的偏好是通过MCUF给定的，无差异估值 p_t 是通过方程 $ess\sup\limits_{g\in C_t}\Phi_t\left(g-p_t(X)+X\right)=ess\sup\limits_{g\in C_t}\Phi_t(g)$ 确定的。其中，C_t 表示从t时刻开始零财富的初始状态，可以从市场上所能获得的所有财富X的超复制交易。所有 Φ_t, p_t 都是 F_t- 可测的。文献Erik Ekström, Johan Tysk（2008）将凸性特征扩充到基础过程为短期利率过程的债券和债券期权情况下，并且对各种利率期结

构模型进行比较。假设短期利率在给定风险中性概率测度下表现为一个随机过程 $X=\left(X_t\right)_{t\geq 0}$，具有动力学特征

$$dX_t=\beta\left(X_t,t\right)dt+\sigma\left(X_t,t\right)dB_t$$

其中，B_t 是标准Brown运动，β,σ 是给定的关于时间和瞬时利率的函数。不难得到，T-债券价格为 $u\left(x,t\right)=E_{x,t}\left[\exp\left\{-\int_t^T X_s ds\right\}\right]$，其中指标意味着 $X_t=x$；由Feynman–Kac定理得到债券价格 $u\left(x,t\right)$ 所满足的利率期结构方程为：

$$\begin{cases} u_t+\frac{1}{2}\sigma^2\left(x,t\right)u_{xx}+\beta\left(x,t\right)u_x-xu=0, & t<T; \\ u=1, & t=T; \end{cases}$$

在这里，可以综合利用随机分析与抛物型偏微分方程技术解决相关问题。其中债券价格关于x的凸性，说明债券价格是利率x的递减函数，这个事实与金融经济学原理是相容的，另外表明这种递减量的绝对量是递减的，这也与市场表现趋势一致。关于期权价格有

$$U\left(x,t\right)=E_{x,t}\left[\exp\left\{-\int_t^T X_s ds\right\}g\left(X_T\right)\right]$$

这里其中函数 g 是凸的支付函数。此外，利用风险测度凸性，来优化投资结构也是凸技术在风险理论中较为重要的内容。

（2）畸变变换与风险量化技术

前文中已经讲过，早在上世纪六十年代初期Fama, E.,（1963，1965a,b,），Mandelbrot, B.,（1963，1967）等就对金融资产市场回报所遵循的高斯背景假设提出了质疑，提出了稳定分布概念。后续众多研究者对金融资产收益的厚尾性、偏态性、非对成性等提出了实证分析的有力佐证。所以对于金融风险测度理论与技术来讲，概率测度变换就是科学合理修正理论与市场偏离的一个重要方面。Wang, S. (1996，2000)提出畸变函数概念，研究了畸变变换的特征。如果函数 $g:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]$ 是非减函数，且满足 $g\left(0\right)=0,g\left(1\right)=1,$ 则对于许多风险测度所定义的风险函数，对 $p\in\left[1,\infty\right)$ 有 $R_g:L^p\left(\Omega,\mathrm{F},P\right)\to\Re$，可以通过Heuristic-Stieltjes积分来表示：

$$R_g\left(X\right)=\int_0^1 VaR_t\left(X\right)dg\left(t\right)$$

如我们取 $p=2,a>0$，令 $g\left(t\right)=\Phi\left(\Phi^{-1}\left(t+a\right)\right)$，则得到了Wang-测度。取 $p=1,a>1$ 为常数，畸变函数为 $g\left(t\right)=1-\left(1-t\right)^a$，则得到对偶幂函数变换（Dual Power Transform）.不难证明这两个风险测度中常数 a 反映了风险决策者的风险厌恶程度，并且关于常数 a 是风险厌恶递增的。如果我们分别取畸变函数为

$$g\left(t\right)=\begin{cases}0, & t<\mu_0 \\ 1, & t\geq\mu_0\end{cases}$$ 或者取

$$g\left(t\right)=\begin{cases}t/\mu_0, & t<\mu_0 \\ 1, & t\geq\mu_0\end{cases}$$

则相应的得到分位数风险测度函数 $VaR_{\mu_0},CVaR_{\mu_0}$。

另外，在畸变变换下，风险测度函数 $R_g\left(X\right)$ 与风险技术要求中的二级随机占优、效用极大化等市场要求是相容的；在Wang-测度下，风险测度函数 $R_g\left(X\right)$ 可以导出经典CAPM和Black-Scoles期权定价原则。相关技术细节参看文献Wang,S.(2002)。关于畸变风险测度的最新文献Andreas Tsanakas（2008），在Denneberg (1990) 和 Wang (1996)构造的畸变风险测度

$$\rho\left(X\right)=\int_{-\infty}^0\left(g\left(F_X^{-1}\left(x\right)\right)-1\right)dx+\int_0^\infty g\left(F_X^{-1}\left(x\right)\right)dx$$

的基础上，比较研究了畸变风险测度与谱系风险测度在风险测度技术理论中的基础性作用，证明了它与风险背景下Yaari(1987)的对偶选择理论的经济学解释、Artzner, P.,et al.的一致性风险公理、Acerbi (2002).的谱系风险测度理论、非线性概率测度变换下的期望损益等都相容；给出了相对风险背景下的畸变风险测度概念：

$$\rho\left(X;Y\right)=E\left[Xg'\left(F_{X+Y}^{-1}\left(X+Y\right)\right)\right]$$

其中畸变函数 $g(.)$ 满足：递增、凹性、$g\left(0\right)=0,g\left(1\right)=1$、一阶有界可微。在新概率测度变换下，就一类椭圆型分布的尾部风险特征进行了研究，得到了关于基础风险的单体风险影响和组合优化策略的新结论。

（3）鞅测度变换与风险量化技术

风险测度的鞅性构造是现代风险测度理论的标志之一。早在上世纪七十年代末，具有里程碑意义的文献Harrison,M.,and D. Kreps. 1979，Gerber, H.U., 1979就开始将经济金融领域中有关价值方程所涉及的未定权益资产的估值问题与鞅联系了起来，M.

Harrison, S. Pliska,1981.；C. Stricker,1990.；F. Delbaen, W. Schachermayer，1994.进一步将鞅性与金融市场的无套利条件结合，证明了无套利市场必然存在等价的鞅概率测度。此后，大量研究者为寻求合适的鞅测度来研究金融风险的测度问题，包括套利、套期和资产定价等风险测度规律。

到目前研究状况看，大致可以分为两类：一类可以认为是静态类鞅测度，其共性是在一定市场条件下，没有进一步的市场信息时，研究鞅测度的存在性，如F. Delbaen, W. Schachermayer, 2006.引用$q-$最优鞅测度（$q=2$）研究金融资产定价规律；P. Grandits, 1999b，和M. Jeanblanc, S. Klo¨ppel, Y. Miyahara,2007.研究了勒维过程下的$q-$最优鞅测度（$\forall q \notin [0,1]$）；M. Frittelli, 2000.引用最小熵鞅测度研究非完备市场资产估值问题，Fujiwara, T., Miyahara, Y., 2003.引用集合勒维过程来研究最小熵鞅测度的存在性，从而为基础资产为几何勒维过程的衍生品定价设定了技术基础；T. Goll, L. Ru¨schendorf, 2001，利用最小距离鞅测度来优化组合资产，而F. Bellini, Frittelli Marco,2002利用极小极大鞅测度的存在性来研究金融市场的套利问题，这一切都可以归结为静态鞅测度的存在性技术研究。

另外一类研究鞅测度的类型的最大特性是动态性，我们称其为动态鞅测度技术研究，主要表现是鞅测度随时间的变异性，可以讨论鞅测度关于市场因子或市场参数如有效期、出清时间等变动时的测度变异性、或等价地关于鞅测度密度过程关于市场因子或参数的变异性问题。在这一类中主要使用的鞅测度有最小鞅测度；如Fo¨llmer,H., M. Schweizer,1991.使用最小鞅测度研究非完备市场未定权益资产套期问题，M. Schweizer,1995.使用最小鞅测度技术研究一般市场估值问题。另一个为最小熵Hellinger-鞅测度（minimal entropy–Hellinger martingale measures），如T. Choulli, Ch. Stricker,2005，2006，2007，应用最小熵Hellinger-鞅测度研究衍生品定价问题。近期在鞅测度风险量化方面研究的主要问题是基础资产在更一般随机过程下的存在性和衍生品定价、风险测度检验等技术问题，特别是时齐问题。

3.1.5 动态风险测度与风险公理

自 Artzner et al.（1997，1999）引入一致性风险测度公理以来，关于金融风险测度理论研究集中于寻求满足公理要求的各种风险测度技术方法，如上述各种风险测度技术。Artzner et al. (2002, 2003) 和 Epstein and Schneider (2003) 中在离散状态下研究了动态随机风险测度问题。Delbaen (2003).对连续随机变量背景研究了动态风险测度技术，现阶段该技术领域仍然是风险测度理论研究的重要领域之一。下面我们看看动态风险测度产生的经济学机理。

假设考虑经济活动在有限时区$[0,T]$发生，目标是一个到期期限为 T 的负债。在无套利假设下的完备市场，考虑代理人在$t=0$时，不能够保证所有量$C(0)=E\left[\frac{C}{S_0(T)}\right]$得到完全套期。其中$S_0(t)-t$时刻市场上无风险资产的价格；期望$E-$是关于唯一的中性风险鞅测度；$C-$是待测度的风险。Cvitani´c, J., and Karatzas L.,1999.建议使用最小期望纯损失贴现来测度风险，即

$$\rho(x,C)=\inf_{\pi(.)\in \mathrm{A}(x)} E_0\left[\left(\frac{C-X^{x,\pi}(T)}{S_0(T)}\right)^+\right]$$

其中$x-$初始可利用的资本；$\mathrm{A}(x)-$可考虑的组合策略集合；$X^{x,\pi}-$对应于组合$\pi(.)$、原始资本为x的财富过程；则计算结果为在一定市场条件下，保证风险暴露在一定可接受条件下的最小量。它正是静态下偏矩（static lower-partial-moment risk）风险的动态版。即对动态 VaR $\rho(x,C)=\sup_{\pi(.)\in \mathrm{A}(x)} P_0\left(X^{x,\pi}(T)\geq C\right)$的修正. 显然，在这里没有考虑纯套期损失的程度$\left(C-X^{x,\pi}\right)^+$；其实以上最小期望纯损失贴现，还可以扩展到

$$\rho(x,C)=\inf_{\pi(.)\in \mathrm{A}(x)} E_0\left[l\left(\left(\frac{C-X^{x,\pi}(T)}{S_0(T)}\right)^+\right)\right]$$

其中$l(.)$是凹函数。更进一步，如果代理人面对的金融市场是不确定的，也就是说市场情景是多样性的，则我们将由一族可能的“现实世界概率”或“情景 scenarios” $\mathrm{P}=\{P_\gamma\}_{\gamma\in D}$代替唯一概率测度$P_0$即可综合这种市场的不确定性。定义风险下测度（lower-measure）为

$$\rho(x,C)=\sup_{\gamma\in D}\inf_{\pi(.)\in \mathrm{A}(x)} E_\gamma\left[\left(\frac{C-X^{x,\pi}(T)}{S_0(T)}\right)^+\right]$$

这个从代理人角度，可以理解为最差可能情景（worst possible scenario）发生时风

险暴露问题。也可以定义风险上测度（upper-measure）为

$$\rho(x,C)=\inf_{\pi(.)\in A(x)}\sup_{\gamma\in D}E_{\gamma}\left[\left(\frac{C-X^{x,\pi}(T)}{S_0(T)}\right)^{+}\right]$$

它可以从管理者角度理解为对代理人努力状态的理解，很少考虑市场最差状态的出现。因此，以上可以看成是代理人对市场的一场随机博弈。当上式两个值相等时，表明管理者与代理人达成共识。可以证得风险下测度满足如下特性：

（1）

$\rho(x,C)\le\left\|(C-x)^{+}\right\|_{\infty}=ess\sup(C(\omega)-x)^{+}$；

（2）

$\rho(x_1+x_2,C_1+C_2)\le\rho(x_1,C_1)+\rho(x_2,C_2)$；

（3） 对于任意

$\lambda>0,\rho(\lambda x,\lambda C)=\lambda\rho(x,C)$；

（4） 映射 $x\to\rho(x,C)$ 是凸的、递增的。

映射 $x\to x+\rho(x,C)$ 对于固定的 C 是凸的、递增的。

Siu T. K., Tong H., and Yang H.,2001.提出“Bayesian-Esscher 情景”概念，提倡使用 Bayesian 风险测度来估值衍生品价格，这种风险测度满足一致性公理的四个条件，且整合了主观概率判断和现实市场信息。

Wang, T.，1999.提出基于似然估计的风险测度形式。该测度满足：连续性、风险可分性、相容性、平稳性、远期独立和 timing indifferance,但是不满足转移不变性，因此，该测度不是一致的和凸的。

Riedel, F.,2003.提出考虑市场头寸和可利用新信息的变化。头寸变化通过重新计算未来支付的随机现值而加以考虑；新信息则在Bayesian技术框架内，更新概率测度而加以考虑。他考虑动态风险测度满足如下条件：与过去独立、适应的、单调性与可料转移不变性。

早期文献关于可接受集定义的风险，$\rho_{A}(X)=\inf\{m|X+m\in A\}$，解释为一个最小货币量，使得其加载与一个未定权益或风险资产 X 后，使其变为可接受的风险资产。这个定义引出自然的风险测度性质就是：关于变量递减

$X\le Y\Rightarrow if\ b+Y\in A, b+X\in A$;而关于这个结论的解释却很模糊（This property makes the statement of various results rather clumsy and non-intuitive）.代替其他文献称之为“货币效用函数”，我们称之为“估值a valuation”事实上，就是负风险测度值：

$\pi_{A}(X)=-\rho_{A}(X)=\sup\{m|X-m\in A\}$。在文献Artzner, et al.(1999),中称为一致估值（coherent valuation）满足如下四个特性：

$CV1$ $(concavity):\forall\lambda\in[0,1]$,

$\pi(\lambda X+(1-\lambda)Y)\ge\lambda\pi(X)+(1-\lambda)\pi(Y)$;

$CV2$ $(positive-\text{homogeneity})$:

$if\ \lambda\ge0, then\ \pi(\lambda X)=\lambda\pi(X)$;

$CV3$ $(monotonicity)$:

$if\ X\le Y, then\ \pi(X)\le\pi(Y)$;

$CV4$ $(translation\ \text{invariance}): if\ m\in\Re$,；

$\pi(X+m)=\pi(X)+m$

这些估值特性来自于Gilboa and Schmeidler (1989),研究Bayesian决策理论时的特性，但在这里不是用于风险测度。在一些一般性假定下可以证得任何估值都可以表示为

$\pi(X)=\inf_{Q\in L}E_{Q}[X]$

其中L 为一些概率测度集。而文献F¨ollmer and Schied (2002a) 、Frittelli and Gianin (2002)认为特性CV1-CV4中正齐性CV2是没有必要的，因此引入了“凹估值concave valuation”

$\pi(X)=\inf_{Q\in L}\{E_{Q}[X]-\alpha(Q)\}$

其中的函数 $\alpha:L\to\Re$ 是凹惩罚函数。

在动态风险测度的研究领域中有关“动态”与“多期”的学术理解有两个观点，因此风险技术发展存在两种趋势：一个是在到期期限T结束前，在期限中期对未定权益资产进行估值，在某种意义下，它可看成是估值技术的加添项，然而，自然和谐的特质还是需要满足的。

在这方面研究的主要有Peng (2005), Detlefsen， Scandolo (2005), Kl¨oppel，Schweizer (2007), Cheridito，Kupper (2006), 和 F¨ollmer，Penner (2006).等。另外一个研究方向是：将动态风险测度针对于一个随机现金流，认为风险在初期应归咎于其上一个值，主要文献有Artzner et al. (2007)；F¨ollmer，Schied (2002a, b)；Cvitani`c，Karatzas (1999)； Nakano (2003)；Cheridito et al. (2004)；和Riedel (2004)等。而另外一个较少注意到的研究方向是将“随机现金平衡过程”作为输入，而将“随机收益，作为时间函数的估值”作为输出，风险测度就是应用于这样一个背景下。在这种背景下研究动态风险测度的文献有Scandolo (2003, 2004)；Frittelli， Scandolo (2006)；Cheriditoet al. (2006)和Jobert,A.，L. C. G. Rogers（2008）.；现金均衡的随机波动，显

然是现金流问题的根本问题，也是风险测度的本质问题。在这种状况下，作为长期资产管理实践，只考虑将来某任意时刻现金累积的总量是不够的。静态与动态风险测度的本质区别是动态一致问题（dynamic consistency），在静态风险测度中，尽管任何一个概率测度集，都能产生一个一致估值，但只有这些概率测度集在某种相容意义下才收敛到某一致估值。这种概率测度的相容性，Epstein, L., and M. Schneider (2003)建立了瞬时多期先验模型，利用经验Bayesian方法更新先验集“rectangular”；Artzner,et al.(2007)则使用鞅测度变换技术来建立这种概率测度的相容性；Riedel (2004)利用Bayesian更新和不同类型的转移不变性来建立概率测度的相容性。正如Frittelli，Gianin (2002), F¨ollmer，Schied (2002) 在单期模型下，扩展Artzner, et al. (1999)的一致性风险测度到凸风险测度一样，该领域的最新文献Jobert,A., and L. C. G. Rogers，2008.选择动态凹估值族（*dynamic family of concave valuations*）概念扩展了Artzner,et al.(2007)中的动态一致估值技术。其公理化技术基础是基于如下市场估值算子的性质，假设金融市场的随机性可以描述为一个滤过的概率空间$\left(\Omega, \mathrm{F}, (\mathrm{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$，估值算子为映射

$\pi_{st}: L^{\infty}(\mathrm{F}_t) \to L^{\infty}(\mathrm{F}_s), (0 \leq s \leq t)$，满足如下性质：

$\mathrm{A}_1: \forall \pi_{st}-$是有界、正的线性算子

$\pi_{st}: L^{\infty}(\mathrm{F}_t) \to L^{\infty}(\mathrm{F}_s), (0 \leq s \leq t)$；

A_2: (no arbitrage)

$if\ Y \in L^{\infty}(\mathrm{F}_t), Y \geq 0, then\ \pi_{st}(Y) = 0 \Leftrightarrow P(Y > 0) = 0;$

$\mathrm{A}_3: (dynamic\ consistency)$

$For\ 0 \leq s \leq t \leq \mu, Y \in L^{\infty}(\mathrm{F}_\mu), X \in L^{\infty}(\mathrm{F}_t),$

$\pi_{s\mu}(XY) = \pi_{st}(X\pi_{t\mu}(Y));$

$\mathrm{A}_4: (continuity)\ If\ Y_n \in L^{\infty}(\mathrm{F}_t), |Y_n| \leq 1, n = 1, 2, \cdots.$

$Y_n \uparrow Y, \Rightarrow \pi_{st}(Y_n) \uparrow \pi_{st}(Y);$

不失一般性，设F_0是平凡的，则存在一个严格正的过程，估值算子有表示式：

$$\pi_{st}(Y) = \frac{E\left[\xi_t Y | \mathrm{F}_s\right]}{\xi_s}, (0 \leq s \leq t)$$

现在，这个公理化的表示结构中，动态相容（或一致）性性质A_3是核心，它可以解释为在时刻u得到X单位的Y有两种方式，一种是在时刻s购买未定权益XY；一种是在s时刻购买X单位的到t时刻瞬时价格为$\pi_{tu}(Y)$的资产Y；动态相容性性质说明，这两种交易在s时刻是等值的，这就是动态风险测度的实质内容。

3.2 风险序化理论

3.2.1 随机占优与风险比较

随机序化理论是风险测度理论中的重要组成部分之一，其重要应用渗透于金融风险管理风险分析的各个方面。比较和序化随机风险也是精算理论与实务中的一个重要问题。早在1944年von Neuman 和 Morgenstern提出期望效用理论，并指出在投资分析中风险厌恶者（risk averters）的效用为严格凹函数；风险追求者（risk seekers）的效用函数为严格凸函数；并且两种函数都是递增函数。之后，比较效用函数和随机占优理论便成为经济学、金融学和保险精算学界的主要学术问题之一。1948年Friedman，Savage (1948)指出利用严格凹函数对于投资者购买保险产品和彩券是没有解释力的。1952年Markowtz在其投资组合理论中，将Friedman-Savage问题的解决描述为投资者效用函数既有凹性特征，也有凸性特征，不论是在负定义域上还是正的定义域上。Williams, C.A.Jr.1966.从实证数据入手证实了投资行为从风险厌恶型到风险追求型的转变。Kahneman，Tversky (1979) 和Tversky，Kahneman (1992)指出效用函数对于收益是凹的，而对于损失是凸的，并且收敛于$S-$型。从而发展了一般损失厌恶型成果得到基于极大化$S-$型效用函数的期望理论（prospect theory）。Thaler and Johnson (1990)从实证中得到与静态期望理论相反的结论，即先前的状态影响随后的行为，较多的风险追求紧跟着先前获得收益后，较多的风险厌恶紧随着先前的发生了损失。这就是动态的期望效用理论（dynamic prospect theory），对应着逆$S-$型效用函数。Levy and Wiener (1998)进一步发展了这一理论。Levy and Levy (2002)首次提出投资选择的新标准马科维兹随机占优（calledMarkowitz StochasticDominance (MSD)）来针对所有逆$S-$型效用函数的投资决策者；选择另外一个新标准称为期望随机占优（Prospect Stochastic Dominance (PSD)）来针对$S-$型效用函数的决策者。W.K.Wong , R. H. Chan, 2008. 首次将MSD和PSD推广到前三阶随机占优，并建立了与$S-$型效用函数和逆$S-$型效用函数的联系。并证实了MSD和PSD以及各阶SD与期望效用理论的相容性。

在随机序理论的应用方面，以信用组合风险分析为例。从风险分析的观点看，信用风险向量的结构相依性、可转换性

（exchangeability）的假定是较为普通的，因为这样可以排除（moving away）所有可能的边际分布的影响，而将注意力放在相依结构的分析上。特别是这种假定导致的一个表示结果具有强有力的能力，可以将相依结构分析递减到单一风险因子 $\tilde{p}$ ，导致更加简易的分析。一个问题就是是否可以通过一些个随机序，使得从一个 $\tilde{p}$ 导出风险向量 $\left(D_1,D_2,\cdots,D_n\right)$；早在九十年代，Lefèvre, C., Utev, S., 1996.指出 $\tilde{p}$ 的随机停损序收敛到 $\sum D_i$ 的停损序；Denuit, M., Müller, A., 2002 探索多因子混合模型和混合分布的随机序对整体相依结构的影响；同时随机序理论在精算学领域得到了巨大的发展，特备是Bäuerle (1997)； Müller，Scarsini (2000).研究了超模序（supermodular order），且得到应用于聚合损益比较分析的简易性结果，引起很多研究者注意；Bäuerle and Müller (1998)，Müller (1997)研究了某些相依结构模型下多元随机序的问题，并应用于停损序研究；并且在最新文献Bäuerle, N., Müller, A., 2005 中，将具体一些一元随机序在凸风险测度下特性研究具体化；这种具体化的随机特性在多元随机风险分析中的结论，被Burgert and Rüschendorf (2006)加以推广；在Dhaene，Goovaerts (1997)；和Cossette et al. (2002) 中，作者比较了多种两个相依风险组合间随机序的特性；一些比较结果的结论在文献 Burtschell，et al. (2005) 和 Burtschell et al. (2007)中应用于信用风险管理的实践。

随机序理论的发展，具有里程碑意义的文献有：Denuit et al. (2005)；Müller，Stoyan(2002)； 以及Shaked, Shanthikumar (1994).

3.2.2 同单调与风险比较

关于同单调性的研究主要集中在是那个领域，一个是解决随机向量各分量之间的相依性结构以及对应的风险测度问题；一个是在同单调性情况下如何优化组合投资的问题；第三个问题是在一般过程中，如果过程之间保持同单调性会形成什么样的风险分析结论。

首先，关于同单调与相依性之间关系问题。在金融与精算界，考虑随机变量和的分布具有重要的理论价值和应用前景。然而在传统的风险理论中，假设综合风险各个加项之间的相互独立性既是一个技术考虑，也是一个一般通式，因为这种情况下，经典统计中的大数定律、中心极限定理和其他大样本下的统计推断技术对聚合风险的分布推断具有技术上的支持，如在Panjer的递推式、 De Pril的递推式和基于矩母函数卷积计算等各种近似算法都是这样一个假设，但是这与市场实际并不相符。使用独立性假设的另外一个原因是，在以前金融市场综合性、开放性程度不是很高的情况下，风险管理者掌握居多的是聚合风险模型中边际分布的特性，而对不同风险聚合过程中的相互作用机理理解很少，所以，在经典风险理论、风险测度理论的技术分析中，都假定了相互独立性。如果我们记 $n-$ 维向量 $\underline{x} \square \left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in\Re^n$，向量之间的序关系通过分量序定义，记如果 $\underline{x}\le\underline{y}\Leftrightarrow\forall i=1,2,\cdots,n.\quad x_i\le y_i$ 总成立。称集合 A 为单调集，如果有 $\mathrm{A}\subseteq\Re^n,\forall\underline{x},\underline{y}\in\mathrm{A},$ 都有 $\underline{x}\le\underline{y}$ 或者 $\underline{y}\le\underline{x}$ 之一成立。定义 n 维欧氏空间子集 A 的 $(i,j)-$ 射影集 $\mathrm{A}_{i,j}\square\left\{\left(x_i,x_j\right)\middle|\underline{x}\in\mathrm{A}\right\}$；则有 A 为同单调的充要条件是对于任意两个正整数 $i,j\in\{1,2,\cdots,n.\}$ $\mathrm{A}_{i,j}$ 是同单调集。随机向量 $\underline{X}=\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$ 的支集（支撑集）是满足 $P\left(\underline{X}\in\mathrm{A}\middle|\mathrm{A}\subseteq\Re^n\right)=1$ 的集合 A 。随机向量称为是同单调的，如果它的支集是同单调的。文献J. Dhaene,et al.(2002)得到以下基本结论：以下条件是随机向量为同单调的等价条件

（1）、 随机向量 $\underline{X}$ 具有同单调支集；

（2）、 对于任意 $\underline{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 有：

$F_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right)=\min\left\{F_{X_1}\left(x_1\right),F_{X_2}\left(x_2\right),\cdots,F_{X_n}\left(x_n\right)\right\}$；

（3）、 对于任意均匀分布 $U\square U(0,1)$，

$\underline{X}\underline{\underline{d}}\left(F_{X_1}^{-1}(U),F_{X_2}^{-1}(U),\cdots,F_{X_n}^{-1}(U)\right)$；

（4）、 存在一个随机变量 Z 和非减函数组 $f_i,(i=1,2,\cdots,n.)$ 满足：

$\underline{X}\underline{\underline{d}}\left(f_1(Z),f_2(Z),\cdots,f_n(Z)\right)$

从该结论中我们可以得到这样几个结论：

第一、 对与任何随机向量，有：

$\mathrm{P}\left\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n\right\}\le\min\left\{F_{X_1}\left(x_1\right),F_{X_2}\left(x_2\right),\cdots,F_{X_n}\left(x_n\right)\right\}$

而事实上，$\left(F_{X_1}^{-1}(U),F_{X_2}^{-1}(U),\cdots,F_{X_n}^{-1}(U)\right)$ 的累积分布函数就是上式右边函数值，也就是说它与随机向量 $\underline{X}=\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$ 具有相同的边际分布。则不等式说明说有随机向量族 $\underline{X}=\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$ 具有相同的边际分布，如果向量是同单调的，则所有随机向量各分量同时取到最小值的概率极大化了，即同单调是最强的正相关结构。

第二、从等价条件（4）可以看到，随机向量各个分量之间的相依性是一种外制的机制

所形成，我们可以通过一个随机变量Z来刻画这种外制机理的不确定性。这样对于随机向量所描述的总风险可以分为两个步骤：首先是确定外制风险机制的随机变量Z及其分布函数 $F_Z(z)$；其次，是在给定 $Z=z$ 的条件下，个体风险 X_i 的条件边际分布；这种机理的一种特例就是建立关系 $x_i=x_i(z)$，且是z的非减函数。而这个正是（4）的结论。

至于同单调应用于组合优化问题。自F¨ollmer，Schied (2002)拓展凸风险测度于风险管理各领域以来，金融市场上关联代理人之间的最优风险分配成为精算学与数理金融学领域的研究热点之一，其中一个关键技术节点是Pareto最优风险分配所具有的同单调性。这一结果是Landsberger，Meilijson (1994)在推进非同单调风险分配优化技术，构建凸序时得到的。B¨auerle and M¨uller (2006)指出所有不变律凸风险测度都与凸序相容，组合风险的Pareto最优分配的必要条件是同单调的，该结论推展了Landsberger，Meilijson（1994）的离散有界约束。Michael Ludkovskia, Ludger R¨uschendorf（2008）.将以上结果推广到一般无界随机变量，并在一系列一致性风险测度下，得到了最优风险分配的表示式。令 $S^c=X_1^c+X_2^c+\cdots+X_n^c$ 是随机向量 $\underline{X}$ 的各分量的逆随机向量构成的同单调随机向量的各个分量之和。则在J. Dhaene, et al.(2002a)的定理5给出结论 $\alpha-$逆分布函数满足

$$F_{S^c}^{-1(\alpha)}(p)=\sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p),0<p<1,0\le\alpha\le1$$

且对于停损保费有 $E\left[\left(S^c-d\right)^+\right]=\sum_{i=1}^{n}E\left[\left(X_i-d_i\right)^+\right]$

其中的

$$d_i=F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}\left(F_{S^c}(d)\right),i=1,2,\cdots,n.,\alpha_d\in[0,1];$$

$$d=F_{S^c}^{-1(\alpha_d)}\left(F_{S^c}(d)\right);$$

如此，在同单调下不但得到了总分布特征，也就部分风险测度的总的风险量化结构的特征给出了解析表达。文献M. Ludkovskia, L. Ruschendorf(2008).中使用了与凸序相容的风险测度技术得到一系列Pareto最优风险分配的同单调特性。可见，同单调性在风险测度理论方面所具有的特殊功能。关于相依性结构的风险分析，在现阶段远远没有结束，这又赖于更多的研究者在这一领域的探索研究，提出新理念、探索新方法。

最后，关于同单调的过程问题。Elyès Jouini, Clotilde Napp(2003),给出了同单调过程的概念，并就两个同单调过程的扩散部分的约束进行了研究，得到了扩散系数之间的约束方程，为过程结构下的风险测度问题奠定了基础。该领域研究仅仅时刻概念性阶段，有很多问题如基础资产为给定同单调过程下，有关的套期、定价问题等有待深入研究。

3.3 风险优化理论

Rockafellar, R. T.,et al.(2006)定义了有界期望风险测度概念，它是建立在空间 $L^p(\Omega,\mathrm{F},P)$ 上的实值函数，满足转移不变性、齐次性、次可加性，并且有

$$\forall X\in L^p(\Omega,\mathrm{F},P):\rho(X)>-\int_\Omega xdP,$$

利用对偶特性，得到对于任何的有界期望测度，有表示式

$$\rho(X)=\max\left\{-\int_\Omega xzdP\middle|z\in\Delta_\rho\right\}$$

其中，$X\in L^p,p,q\in(0,1)$ 满足 $1/p+1/q=1$，

$\Delta_\rho\subset L^q(\Omega,\mathrm{F},P)$ 是凸的，满足

$$\Delta_\rho=\left\{Z\in L^q\middle|-\int_\Omega xzdP\le\rho(X),\forall X\in L^p\right\}$$

结论是如果要求得到的风险测度为一致的，则必须有 Δ_ρ 包含于 L^q 中的一个正锥上。

关于风险测度优化问题大量集中在对给定风险测度下，求解最优套期、定价和风险资产的分配问题。如Schied, A., (2007)，F¨ollmer, H. and Leukert, P., (2000)，Nakano, Y., (2004)对套期在非完备市场下的策略选择问题；组合选择问题Benati, S., (2003).在一致性风险测度约束下得到极小化WCE风险的组合选择策略；Rockafellar, R. T.et al.(2006).研究了在一般变差风险测度结构下，组合优选问题。Ruszczynski, A. and Shapiro, A., (2007).研究了更一般风险测度机制下的组合优选策略。Balb´as, A.et al.(2008). 则在一般Banach空间中在风险函数的解释式

$$\rho(X)=\max\left\{-\int_\Omega xzdP\middle|z\in\Delta_\rho\right\}$$

的架构中，转化为一般线性规划问题，求解风险优化策略问题。

关于风险测度的优化理论与技术，从Markowtz（1952）提出组合优化理论以来，基本上就在两个方向上展开，一个是均值-风险技术，即在一定期望收益约束下的风险最小化或一定风险约束下的期望收益最大化；另外一个是随机占优问题，随机占优概念来自于Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Po′lya, G.,(1934)关于随机不等式的研究，随后在经济学家研究不确定性决策理论时引入随机效用的比较中，这样加载效用理论、风险偏好理论的优化技术分析称为这一方向的主流。

Artzner,P.et al.(1999)提出一致性风险测度之后，组合优化了理论变为 $\min_{z\in Z}\rho\left(R^T z\right)$，利用凸分析理论技术，可以得到最优解。F¨ollmer, H. and Schied, A., (2002a) Rockafellar, R. T., Uryasev, S. and Zabarankin, M., (2006).等推广了这一技术领域。N. Miller , A. Ruszczyn,(2008).在现代风险测度理论的技术支持下，建立了优化问题的等价表述，构建零和矩阵对策模型，将博弈论的技术引入优化问题来，并利用凸技术解决对应优化问题。总之，优化技术已经通过概率测度变换，效用函数的技术处理，和现代风险测度理论技术的综合应用，对金融风险管理的技术创新提出了前所未有的大挑战，相信在近几年的努力下，会有更好的发展。

4、风险测度理论的展望

基于现代大金融理念的社会实践基础，风险测度理论的发展孕育了一个天然的技术要求，那就是大交叉，即多领域交融、多学科交叉、理论研究与技术研究和社会实践的高度统一是现代风险测度理论发展的基本架构。从准备金需求量化、保费厘定、投资组合优化、金融衍生品定价，到风险暴露分析下的套期、对冲、风险资产证券化；从完备市场到非完备市场的均衡价格分析，到多目标、多层次、不同市场法规约束下的跨国企业集团的战略投资中的金融风险管理实践要求；无一例外地要求风险的认识、量化、序化、优化的技术高度综合，极端复杂而又不乏积极的时效性，因此，风险测度理论任重而道远。主要体现在以下几个方面：

从技术领域看有四个方向：1、风险函数与表示定理；2、多元风险与动态测度；3、风险测度理论的相容性问题——与经济、金融理论相容；4、测度变换由可加性测度到不可加测度，由一般概率空间到随机场论、微分流形、纤维丛上的随机测度问题。

从现代风险测度理论的理论核心——公理化方法的建立任务看。用公理化方法建立测度统计量的思路源于van Zwet(1964)，作为风险测度的函数-风险负荷（risk loading）将在公理化框架下使得金融风险量化与保险产品（风险）定价更紧密结合；这种风险与均值、方差、标度、偏度、峰度与散度的紧密结合；给金融风险管理的各种市场目标提供了统计技术的保障，而公理化框架下的风险测度技术选择与金融市场实践的技术要求的统一性是检验风险测度函数的基本要求。

在所有这些风险测度的研究中，仍然有几个问题需要进一步研究：1、深入研究经典风险测度（包括变异性风险测度、敏感性风险测度-希腊字母系统）和现代风险测度（风险函数、表示定理）之间的关系问题，因为它们涉及几乎所有数理金融的重要研究课题；2、从技术要求看，如何积极整合精算师、金融工程师、风险管理师的技术手段，建立现代风险测度理论的技术架构，仍然有很多工作需要深入研究。传统的精算师培养集中在处理可转移的风险（diversifiable risk）问题上，在SOA和CAS的考试中，精算学技术集中在Bowers, et al.(1997)，和Klugman, Panjer, and Willmot(2004)的课程中。精算师将金融风险计量后转移给银行，金融工程师打包后设计出风险产品出售给金融各级市场。不能转移的风险（non-diversifiable risk）如保证合约或期权，不可能通过增加发行合约（writing more contracts）来规避。如对变化年金(variable annuity-VA)的收益的保证条款进行保险引起的索赔，虽然这种索赔概率较小，但是，一旦发生往往是大量索赔一起到来。确定性模型无法处理这些风险，传统“精算值”无法给出线索来确定合适经济资本的水平，也不能告诉怎样管理或缓解这种风险。这正是几年前，再保险公司开始接受可变年金类型合约的保险产品时面临的一个问题。深潜于VA类型(如抵押品和期权（guarantees and options）)的合适工具来自于金融经济。精算师将风险转移给银行，在那里金融工程师实现对风险的管理，而不是精算师。风险管理起始于产品设计。

1987年，Hans Bulmann在ARSTIN Bulitin编者案中描述第三类精算师（第一类寿险与退休金；第二类是财险与意外险）应该是进入现代金融经济领域的精算师。Andrew Cairns (1998)在 ARSTIN Bulitin 编者按中强调二者的合一。可见，现代社会的金融风险管理是一个复合巨系统，其中的复杂性、非线性性、随机性加上管理决策的主观性，将给现代风险测度理论建设提出异常强的挑战，同时也形成了现代风险测度理论发展的巨大机遇。

References

【1】Acerbi, C., 2002,Spectral measures of risk: a coherent representation of subjective risk aversion, Journal of Banking & Finance, Vol.26, 1505-1518.

【2】Acerbi, C., and Simonetti P., 2002. Portfolio optimization with spectral measures

of risk, Working paper, http://www.icer.it/workshop,2002.
【3】Acerbi, C., Nordio, C., and Sirtori, C., 2001. Expected shortfall as a tool for financial risk management, Working paper, http://www.gloriamundi.org, 2001
【4】Andreas Tsanakas，2008. Risk measurement in the presence of background risk，
Insurance: Mathematics and Economics 42 (2008) 520–528
【5】Andreas Tsanakas, 2004. Dynamic capital allocation with distortion risk measures. Insurance: Mathematics and Economics 35, 223–243.
【6】Andreas Tsanakas, Barnett, C., 2003. Risk capital allocation and cooperative pricing of insurance liabilities. Insurance: Mathematics and Economics 33 (2),239–254.
【7】Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M. and Heath, D., (1999). Coherent Measures of Risk. Mathematical Finance, 9（3）, 203–228.
【8】 Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., Heath, D. and Ku, H., (2004). Coherent multiperiod risk measures. Unpublished manuscript.
【9】 Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., Heath, D. and Ku, H., (2007). Coherent multiperiod risk adjusted values and Bellman's principle.. Annals of Operations Research, 15, 2, 5–22.
【10】 Bachelier, L. "Théorie de la Spéculation", *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **17** (1900) 21-86
[English translation in P. Cootner (ed.) The Random Character of Stock Prices, MIT Press, 1964, reprinted Risk Books, London 2000].
【11】 Balb´as, A., Balb´as, R. and Mayoral, S., (2008). Portfolio choice and optimal hedging with general risk functions:A simplex-like algorithm. Eurpoean Journal of Operational Research (forthcoming).
【12】Bäuerle, N., 1997. Inequalities for stochastic models via supermodular orderings. Communications in Statistics, Stochastic Models 13, 181–201.
【13】Bäuerle, N., Müller, A., 1998. Modeling and comparing dependencies in multivariate risk portfolios. ASTIN Bulletin 28, 59–76.
【14】Bäuerle, N., Müller, A., 2005. Stochastic orders and risk measures: consistency and
bounds. Insurance: Mathematics and Economics 38, 132–148.
【15】F. Bellini, Frittelli Marco, On the existence of minimax martingale measures, Mathematical Finance 12 (4) (2002) 1–21.
【16】 Benati, S., (2003). The optimal portfolio problem with coherent risk measure constraints. European Journal of Operational Research, 150, 572–584.
【17】Bismut, J.M.,(1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control, J.Math.Annal.Appl., 44, 383-404,
【18】Black, F., and M. Scholes. 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* (May): 637–59.
【19】Borch,K.,(1968).The economics of uncertainty,Princeton University Press,
【20】Buhlmann, H. 1980. An Economic Premium Principle. *ASTIN Bulletin* 11: 52–60.
【21】Burgert, C., Rüschendorf, L., 2006. Consistent risk measures for portfolio vectors. Insurance: Mathematics and Economics 38, 289–297.
【22】Burtschell, X., Gregory, J., Laurent, J.-P., 2005. A comparative analysis of CDO pricing
models, working Paper, ISFA Actuarial School, University of Lyon and BNPParibas.
【23】Burtschell, X., Gregory, J., Laurent, J.-P., 2007. Beyond the Gaussian copula: stochastic
and local correlation. Journal of Credit Risk 3 (1), 31–62.
【24】Chamberlain, G. and Rothschild, M., (1983). Arbitrage, factor structure, and mean-variance analysis on large assets. Econometrica, 51, 1281–1304.
【25】Chambers, D. R., Carleton,W. and McEnally, R., (1988). Immunizing default-free bond portfolios with a duration vector. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 23, 1, 89–104.
【26】G. Choquet, 1953，Theory of capacities, Ann. de l'Institut Fourier 5 (1953/1954) 131–295.
【27】T. Choulli, Ch. Stricker,2005. Minimal entropy–Hellinger martingale measure in incomplete markets, Mathematical Finance 15 (3) (2005) 465–490.
【28】T. Choulli, Ch. Stricker, 2006.More on minimal entropy–Hellinger martingale measure, Mathematical Finance 16 (1) (2006) 1–18.

【29】T. Choulli, Ch. Stricker, Jia Li, 2007.Minimal Hellinger martingale measure of order q, Finance and Stochastics 11 (3) (2007) 399–427.

【30】Cochrane, J. H., (2001). Asset pricing, Princeton University Press.

【31】Cossette, H., Gaillardetz, P., Marceau, E., Rioux, J., 2002. On two dependent individual risk models. Insurance: Mathematics and Economics 30 (2), 153–166.

【32】Cox, J.C. and Ross, S.A. (1976) The valuation of options for alternative stochastic processes,*Journal of Financial Economics* 3, 145-166.

【33】Cvitanic, J. Karatzas, I., (1999). On dynamic measures of risk. Finance & Stochastics, 3, 451–482.

【34】F. Delbaen, W. Schachermayer, 1994.A general version of the fundamental theorem of asset pricing, Mathematische 18 Annalen 300 (1994) 463–520.

【35】F. Delbaen, W. Schachermayer, 2006.The Mathematics of Arbitrage, Springer, 2006

【36】Delbaen, F., 2000. Coherent Risk Measures. Lecture notes, Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy.

【37】Delbaen, F., 2002. Coherent risk measures on general probability spaces.In: Sandmann, K., Scho¨nbucher, P.J. (Eds.), Advances in Finance and Stochastics. Springer-Verlag, pp. 1–37.

【38】Denault, M., 2001. Coherent allocation of risk capital. Journal of Risk 4, 7–21.

【39】Denneberg, D. (1990). Premium calculation : why standard deviation should be replaced by absolute deviation. ASTIN Bulletin 20, 181-190.

【40】Denneberg, D., 1990. Distorted probabilities and insurance premiums. Methods of Operations Research 63, 3–5.

【41】Denuit, M., Müller, A., 2002. Smooth generators of integral stochastic orders. The Annals of Applied Probability 12 (4), 1174–1184.

【42】Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R., 2005. Actuarial Theory for Dependent Risks - Measures, Orders and Models. Wiley.

【43】Deprez, O., Gerber, H.U., 1985. On convex principles of premium calculation. Insurance: Mathematics and Economics 4, 179–189.

【44】Djehiche B. (1993) : “A large deviation estimate for ruin probabilities”, *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, 42-59.

【45】Dybvig, P., and S. Ross (1982): Portfolio Efficient Sets, *Econometrica* 50, 1525–1546.

【46】Einstein, A. “Uber die von der molekularkinetischen Theorie der Warme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten”, *Teilchen. Annalen der Physik* **17**, 1905, 549-560.

【47】Ellsberg, D.(1961), “Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms,” *Quarterly Journal of Economics*,75, 643–669.

【48】Elyès Jouini, Clotilde Napp,(2003). Comonotonic processes, Insurance: Mathematics and Economics 32 (2003) 255–265

【49】Epstein, L., and M. Schneider (2003): Recursive Multiple Priors, *J. Econ. Theor.* 113, 1–31.

【50】Erik Ekström, Johan Tysk，2008. Convexity theory for the term structure equation，Finance Stoch. 12,117-147

【51】Fama, E., 1963. Mandelbrot and the stable Paretian hypothesis. Journal of Business 36, 420–429.

【52】Fama, E., 1965a. The behavior of stock market prices. Journal of Business 38, 34–105.

【53】Fama, E., 1965b. Portfolio analysis in a stable Paretian market. Management Science 11, 404–419.

【54】 Fama, Eugene F., 1970, Efficient capital markets—Review of theory and empirical work, *Journal of Finance* 25, 383–423.

【55】 Fama, Eugene F., and Kenneth R. French, 1993, Common risk factors in the returns on bonds and stocks, *Journal of Financial Economics* 33, 3–56.

【56】Fisher, L. andWeil, R., (1971). Coping with the risk of interest rates fluctuations, Journal of Business, 52, 51–56.

【57】 F¨ollmer, H. and Leukert, P., (2000). Efficient hedging: Costs versus shortfall risk, Finance & Stochastics, 4, 117–146.

【58】F¨ollmer, H. and Schied, A., (2002a). Convex measures of risk and trading constraints, Finance & Stochastics, 6, 429–447.

【59】 Follmer, H., Schied, A., 2002b. Robust preferences and convex measures of risk. Advances in Finance and Stochastics. Springer, Berlin, pp. 39–56.

【60】Follmer, H., Schied, A., 2002c. Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time. De Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 27. De Gruyter, Berlin

【61】Fo¨llmer,H., M. Schweizer,1991. Hedging of contingent claims under incomplete information, in: M.H.A. Davis, R.J. Elliott (Eds.), Applied Stochastic Monographs, vol. 5, Gordon and Breach, New York, 1991, pp. 389–414.

【62】Fong, H. G. and Vasicek, O. A., (1984). A risk minimizing strategy for portfolio immunization, The Journal of Finance, 39, 1541–1546.

【63】Friedman, M., Savage, L.J.: The utility analysis of choices involving risk. J Polit Econ **56**, 279–304(1948)

【64】M. Frittelli, 2000.The minimal entropy martingale measure and the valuation problem in incomplete markets, Mathematical Finance 10/1 (2000) 39–52.

【65】Fujiwara, T., Miyahara, Y., 2003. The minimal entropy martingale measures for geometric Le′vy processes. Finance & Stochastics 7, 509–531.

【66】Dhaene, J.; Goovaerts, M.J. (1996). “Dependency of risks and stop-loss order”,ASTIN Bulletin, vol. 26(2), 201–212.

【67】Dhaene, J., Goovaerts, M., 1997. On the dependency of risks in the individual life model. Insurance: Mathematics and Economics 19, 243–253.

【68】T. Goll, L. Ru¨schendorf, 2001.Minimax and minimal distance martingale measures and their relationship to portfolio optimization, Finance and Stochastics 5 (4) (2001) 557–581.

【69】Doob, J. L. *Stochastic Processes*. New York, Wiley, 1953.

【70】Goovaerts, M.J., de Vylder, F., Haezendonck, J., 1984. Insurance Premiums: Theory and Applications. North Holland, Amsterdam,

【71】Goovaerts, M.J., Laeven, R.J.A.,2007. Actuarial risk measures for financial derivative pricing. Insurance: Mathematics and Economics (2007), doi:10.1016/j.insmatheco.2007.04.001

【72】Gerber, H.U., 1979. An Introduction to Mathematical Risk Theory. In: Huebner Foundation Monograph, vol. 8. Richard D. Irwin, Homewood, IL

【73】Gotoh, J., Konno, H.,2000. Third degree stochatics domonance and mean risk analysis, Management Science, 46(2000), 289-301.

【74】P. Grandits, 1999.On martingale measures for stochastic processes with independent increments, Theory of Probability and its Applications 44 (1999a) 39–50.

【75】P. Grandits, 1999.The p-optimal martingale measure and its asymptotic relation with the minimal entropy martingale measure, Bernoulli 5 (1999b) 225–247.

【76】Haezendonck, J., Goovaerts, M., 1982. A new premium calculation principle based on Orlicz norms. Insurance: Mathematics and Economics 1, 41–53.

【77】Hadar, Joseph, Russell, William R., 1969. Rules for ordering uncertain prospects. American Economic Review 59, 25–34.

【78】Harrison,M.,and D. Kreps. 1979. Martingales And Arbitrage in Multiperiod Security Markets. *Journal of Economic Theory* 20: 381–408

【79】M. Harrison, S. Pliska,1981. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, Stochastic Processes and their Applications 11 (1981) 215–260.

【80】He, H. and Modest, D. M., (1995). Market frictions and consumption-based asset pricing, Journal of Political Economy, 103, 94–117.

【81】Gerber, H. U., and Gerard P., 1998. Utility Functions:From Risk Theory to Finance.*North American ActuarialJournal* 2(3): 74–101.

【82】 Hamilton, J.D., 1989. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. Econometrica 57,357–384.

【83】Hardy, G.H. and Littlewood, J.E. (1930) A maximal theorem with function-theoretic applications. *Acta Mathematica* **54**, 81-116.

【84】Hardy,G.H., Littlewood, J.E., Polya, G. (1952). Inequality, 2nd,ed. Cambridge University Press.

【85】 Hardy, G. H., J. E. Littlewood, and G. Polya, (1988): *Inequalities, Reprint of the 1952 edition*, Cambridge: Cambridge University Press.

【86】Heath, D., Jarrow, R.,Morton, A.: Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology.Econometrica **60**, 77–101 (1992)

【87】 Huber, P.J., 1981. Robust Statistics. Wiley, New York

【88】 He, H. and Modest, D. M., (1995). Market frictions and consumption-based asset pricing, Journal of Political Economy, 103, 94–117.
【89】Ito, K. “Stochastic Integral”, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20**, 1944, 519-524.
【90】M. Jeanblanc, S. Klo¨ppel, Y. Miyahara,2007. Minimal f^q − martingale measures for exponential Le´vy process, Annals of Applied Probability 17 (5/6) (2007) 1615–1638.
【91】 Jocelyne Bion-Nadal，2008. Dynamic risk measures: Time consistency and risk measures from BMO martingales, Finance Stoch (2008) 12: 219–244
【92】John Cox, Stephen Ross, The valuation of options for alternative stochastic processes, Journal of Financial Economics 3 (1976) 145–166
【93】Jouini, E. and Kallal, H., (2001). Efficient trading strategies in presence of market frictions, Review of Financial Studies, 14, 343–369.
【94】 Jouini, E., Meddeb, M. and Touci, N., (2004). Vector-valued coherent risk measures, Finance & Stochastics, 8, 531–552
【95】Jingping Yang,et el.,2006a, Bivariate copula decomposition in terms ofcomonotonicity,countermonotonicity and independence, Insurance: Mathematics and Economics 39, 267–284
【96】Jing-ping Yang,et al.,2006b,Conditional recursive equations on exeess-of-loss reinsurance, Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)，2006，27(8)：1071—108
【97】Kaas, R.; Van Heerwaarden, A.E.; Goovaerts, M.J. (1994). “Ordering of Actuarial Risks”, Caire Education Series, Amsterdam.
【98】Kahneman, D., Tversky, A.: Prospect theory of decisions under risk. Econometrica **47**(2), 263–291(1979)
【99】Kenneth Arrow, The role of securities in the optimal allocation of risk bearing, Review of Economic Studies 31 (1964) 91–96.
【100】Knight, F. H. (1921): *Uncertainty and Profit.* Boston: Houghton Mifflin.
【101】 Konno, H., Akishino, K. and Yamamoto, R., (2005). Optimization of a long-short portfolio under non-convex transaction costs, Computational Optimization and Applications, 32, 115–132.
【102】Kusuoka, S.: On law invariant coherent risk measures. Advances in Mathematical Economics **3**, 83–95 (2001)
【103】Landsman, Z., and Sherris, M., Risk measures and insurance premium principles, Insurance: Mathematics and Economics, 29(2001), 103-115.
【104】Lefèvre, C., Utev, S., 1996. Comparing sums of exchangeable Bernoulli random variables. Journal of Applied Probability 33, 285–310.
【105】 Leitner, J.2004. Balayage monotonous risk measures. Int. J. Theor. Appl. Financ. **7**, 887–900 (2004)
【106】Levy, H., Levy, M.: Prospect theory and mean-variance analysis. Rev Fin Stud **17**(4), 1015–1041(2004)
【107】Levy,M., Levy,H.: Prospect theory:much ado about nothing?Manage Sci **48**(10), 1334–1349 (2002)
【108】Levy, H., Wiener, Z.: Stochastic dominance and prospect dominance with subjective weighting functions. J Risk Uncertain **16**(2), 147–163 (1998)
【109】Lintner, J., 1965. The valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. Review of Economics and Statistics 47, 13–37.
【110】Liu, R. Y. (1990). On a notion of data depth based on random simplices. Ann. Statist. 18 405_414.
【111】Luttmer, (1996). Asset pricing in economies with frictions, Econometrica, 64, 1439–1467.
【112】Macaulay, F.A.,1938. Some theoretical problems suggested by the movements of interest rates, bond yields and stock prices in the United States since 1856. Washington, D.C.: National Bureau of Economic Research.
【113】Mandelbrot, B., 1963a. New methods in statistical economics. Journal of Political Economy 71, 421–440.
【114】Mandelbrot, B., 1963b. The variation of certain speculative prices. Journal of Business 26, 394–419.
【115】Mandelbrot, B., 1967. The variation of some other speculative prices. Journal of Business 40, 393–413.
【116】Mandelbrot, B., Taylor, M., 1967. On the distribution of stock price differences. Operations Research 15, 1057–1062.
【117】Markowitz H． Portfolio Selection，journal of Finance：1952，(7)：77—91
【118】Markowitz, (1952). The Utility of Wealth, Journal of Political Economy.
【119】Markowitz H． Portfolio Selection：Efficient Diversification of Investment

[M]Cambridge：Basil Blackwell，1991：99—110.

【120】Marshall, A.W. and Olkin, I. (1979) *Inequalities, Theory of Majorization and Its Applications*. Academic Press, New York.

【121】Merton, R.C. (1973) An intertemporal capital asset pricing model,*Econometrica* 41, 867-880.

【122】Merton,R.C.,1973.Theory of rational option pricion, Bell Journal of Economocs and Management Science,4,141-183.

【123】 Merton, R.C., 1976. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. Journal of Financial Economics 3, 125–144.

【124】Michael Ludkovskia, Ludger R¨uschendorf（2008）. On comonotonicity of Pareto optimal risk sharing，Statistics and Probability Letters 78 (2008) 1181–1188

【125】N. Miller , A. Ruszczyn,(2008). Risk-adjusted probability measures in portfolio optimization with coherent measures of risk, European Journal of Operational Research 191 (2008) 193–206

【126】 Mowbray, Albert H. 1914. How Extensive a Payroll Exposure is Necessary to Give a Dependable Pure Premium. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* 1: 24–30.

【127】Müller, A., 1997. Stop-loss order for portfolios of dependent risks. Insurance: Mathematics and Economics 21, 219–223.

【128】Müller, A., Scarsini, M., 2000. Some remarks on the supermodular order. Journal of Multivariate Analysis 73, 107–119.

【129】Müller, A., Stoyan, D., 2002. Comparison Methods for Stochastic Models and Risks.
In: Chichester Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons Ltd.

【130】Nakano, Y., (2004). Efficient hedging with coherent risk measure, Journal of Mathematical Analysis and Applications,293, 34, 5–354.

【131】 Nelsen, R.B., 1999. An Introduction to Copulas. In: Lecture Notes in Statistics, vol. 139. Springer-Verlag, New York.

【132】Oja, H. (1981). On location, scale, skewness and kurtosis of univariate distributions.
Scandinavian Journal of Statistics 8, 154-168.

【133】 Ogryczak, W. and Ruszczynski, A., (1999). From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures, European Journal of Operational Research, 116, 33–50.

【134】Ogryczak, W. and Ruszczynski, A., (2001). On consistency of stochastic dominance and mean semideviation models, Mathematical Programming, 89, 217–232.

【135】Ogryczak, W. and Ruszczynski, A., (2002). Dual stochastic dominance and related mean risk models, SIAM Journal of Optimization, 13, 60–78.

【136】 Pardoux, E.,and S. Peng,(1990). Adapted solution of a Backward Differential Equation, System Contral Lett., 14, 55-61

【137】Peng, S., 1997. Backward SDE and related g-expectations. In: El Karoui, N., Mazliak, L. (Eds.), Backward Stochastic Differential Equations.In: Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 364. Longman, Harlow, pp. 141–159.

【138】Peng, S., 2004. Nonlinear Expectations, Nonlinear Evaluations and Risk Measures. Stochastic Methods in Finance. In: Frittelli, M., Runggaldier,W.(Eds.), Lectures Notes in Mathematics, Springer, pp. 165–254.

【139】Peng, S., 2005. Dynamically Consistent Nonlinear Evaluations and Expectations. ArXiv:math.PR/0501415.

【140】Peleg, B., and M. E. Yaari (1975): A Price Characterisation of Efficient Random Variables,
Econometrica 43, 283–292.

【141】Quandt, R.E., 1958. The estimation of the parameters of a linear regression system obeying two separate regimes. Journal of the American Statistical Association 53, 873–880.

【142】Quandt, R.E., 1972. A new approach to estimating switching regressions. Journal of the American Statistical Association 67, 306–310.

【143】Rockafellar, R. T., and Uryasev, S., 2002.Conditional value-at-risk for general loss distributions, Journal of Banking & Finance, 26(2002), 1443-1471.

【144】Rockafellar, R. T., Uryasev, S. and Zabarankin, M., (2006). Generalized deviations in risk analysis, Finance & Sochastics, 10, 51–74.

【145】Rockafellar, R. T., Uryasev, S. and Zabarankin, M., (2006). Optimality conditions in portfolio analysis with general deviations measures, Mathematical Programming, Ser. B, 108, 515–540.

【146】Ross, S., (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing, Journal of Economic Theory, 13, 341–360.

【147】Rothschild, M., and J. E. Stiglitz,(1970): Increasing Risk, I. A Definition, *J. Econ. Theory* 2, 225–243.

【148】Roy, A., (1952). Safety first and the holding of assets, Econometrica, 20, 431–449.
【149】Ruszczynski, A. and Shapiro, A., (2007). Optimization of risk measures, Mathematics of Operations Research
【150】A. Ruszczyn′ ski, A. Shapiro, Optimization of risk measures, in: G. Calafiore, F. Dabbene (Eds.), Probabilistic and Randomized Methods for Design under Uncertainty, Springer, London, 2005.
【151】A. Ruszczyn′ ski, A. Shapiro, Optimization of convex risk functions, Mathematics of Operations Research 31 (2006) 433–452.
【152】A. Ruszczyn′ ski, R.J. Vanderbei, Frontiers of stochastically nondominated portfolios, Econometrica 71 (4) (2003) 1287–1297.
【153】Schied, A., (2007). Optimal investments for risk- and ambiguity-averse preferences: A duality approach, Finance & Stochastics, 11, 107–129.
【154】 Schur, I. (1923): Uber eine Klasse von Mittelbindungen mit Anwendungen in der Determinantentheorie, *Sitzungsber Math Gesellschaft*, 22, 9–20.
【155】Schmeidler, D. (1989): "Subjective Probability and Expected Utility Without Additivity," *Econometrica*, 57, 571–587.
【156】Shaked, M., Shanthikumar, J., 1994. Stochastic Orders and their Applications.Academic Press, London
【157】 Sharpe, W. F., (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk, Journal of Finance, 19, 3, 425–442.
【158】 Sklar, A., 1959. Fonctions de r´epartition `a n dimensions et leurs marges. Publications de l'Institut de Statistique de l'Universit´e de Paris 8, 229–231.
【159】Sharpe, W.F., 1964. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk.Journal of Finance 19, 425–442.
【160】C. Stricker,1990. Arbitrage et lois de martingales, Annales de l'Institut Henri Poincar´e, Prob. et Statist. 26 (3) (1990) 451–460.
【161】M. Schweizer,1995. On the minimal martingale measure and the F¨ollmer–Schweizer decomposition, Stochastic Analysis and Applications 13 (1995) 573–599.
【162】Thaler, R.H., Johnson, E.J.: Gambling with the house money and trying to break even: the effects of prior outcomes on risky choice. Manage Sci **36**, 643–660 (1990)
【163】 Tobin, J., (1958). Liquidity preference as behaviour towards risk, The Review of Economic Studies, 25, 65–86.
【164】 Treynor, J., (1961). Towards a theory of market value of risky assets, Unpublished manuscript.
【165】Tversky, A.,Kahneman,D.1992. Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty. J Risk Uncertain **5**, 297–323 (1992)
【166】Von Neumann,J., and Morgenstern,O.(1947) Theory of Games and Economic Behavior.Princeton University Press,Princeton,New Jersey
【167】 Wang, S. (1996). "Premium calculation by transforming the layer premium density",*ASTIN Bulletin* 26, 71–92.
【168】Wang, S. S., (2000). A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks, Journal of Risk and Insurance, 67, 15–36.
【169】Wang,S.S.,(2002). A Universa framework for pricing financial and insurance risk. ASTIN Bulletin, Vol. 32, No. 2, 2002, pp. 213-234
【169】Wiener, R. "Differential Space", *J. Math. Phys*. **2**, 1923, 131-174.
【170】 Williams, C.A.Jr.1966. Attitudes toward speculative risks as an indicator of attitudes toward pure risks. J Risk Insur **33**(4), 577–586 (1966)
【170】W.K.Wong , R. H. Chan, 2008. Prospect and Markowitz stochastic dominance，Annals of Finance (2008) 4:105–129
【171】Y. Zuo, R. Serfling, （2000）. Nonparametric notions of multivariate "scatter measure" and "more scattered" based on statistical depth functions, J. Multivariate Anal. 75 (2000) 62–78.
【172】Wu, X., Wang, J., 2003. On characterization of distortion premium principle. ASTIN Bulletin 33 (1), 1–10.
【173】Xianyi Wu; Zhou, Xian, 2006,A New Characterization of Distortion Premiums via Countable Additivity for Comonotonic Risks, Insurance: Mathematics and Economics , 38(2), 324-334.
【174】Xianyi Wu, 2001,The natural sets of Wang's premium principle, Astin Bulletin, 31(1)139-145.
【175】Wang, S.S., 2000. A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks. Journal of Risk and Insurance 67, 15–36.
【176】Yaari, M.E. (1987). The dual theory of

choice under risk. *Econometrica* 55, 95-115.
【177】Yamai, Y., and Yoshiba, T.,2002. On the validity of value-at-risk: comparative analysis with expected shortfall, Institute for Monetary and Economics Studies, Bank of Japan, 20, 57-85.
【178】 Yamai, Y., and Yoshiba, T., 2002. Comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk: their estimation error, decomposition, and optimization, Institute for Monetary and Economics Studies, Bank of Japan, 20(2002), 87-121.

风险测度理论的发展与展望

贺思辉，岳华，冉生欣
华东师范大学国际金融与风险管理研究中心，华东师范大学，上海，中国，200241

摘　要：文章阐释了风险测度理论的发展历程，对风险测度技术进行了结构性分类分析，并对各种风险测度的公理化特性进行比较。文章最后对风险测度理论的应用前景和存在的技术问题进行了有意探索。
关键词：风险测度 风险公理 凸风险测度 动态风险测度 风险技术应用